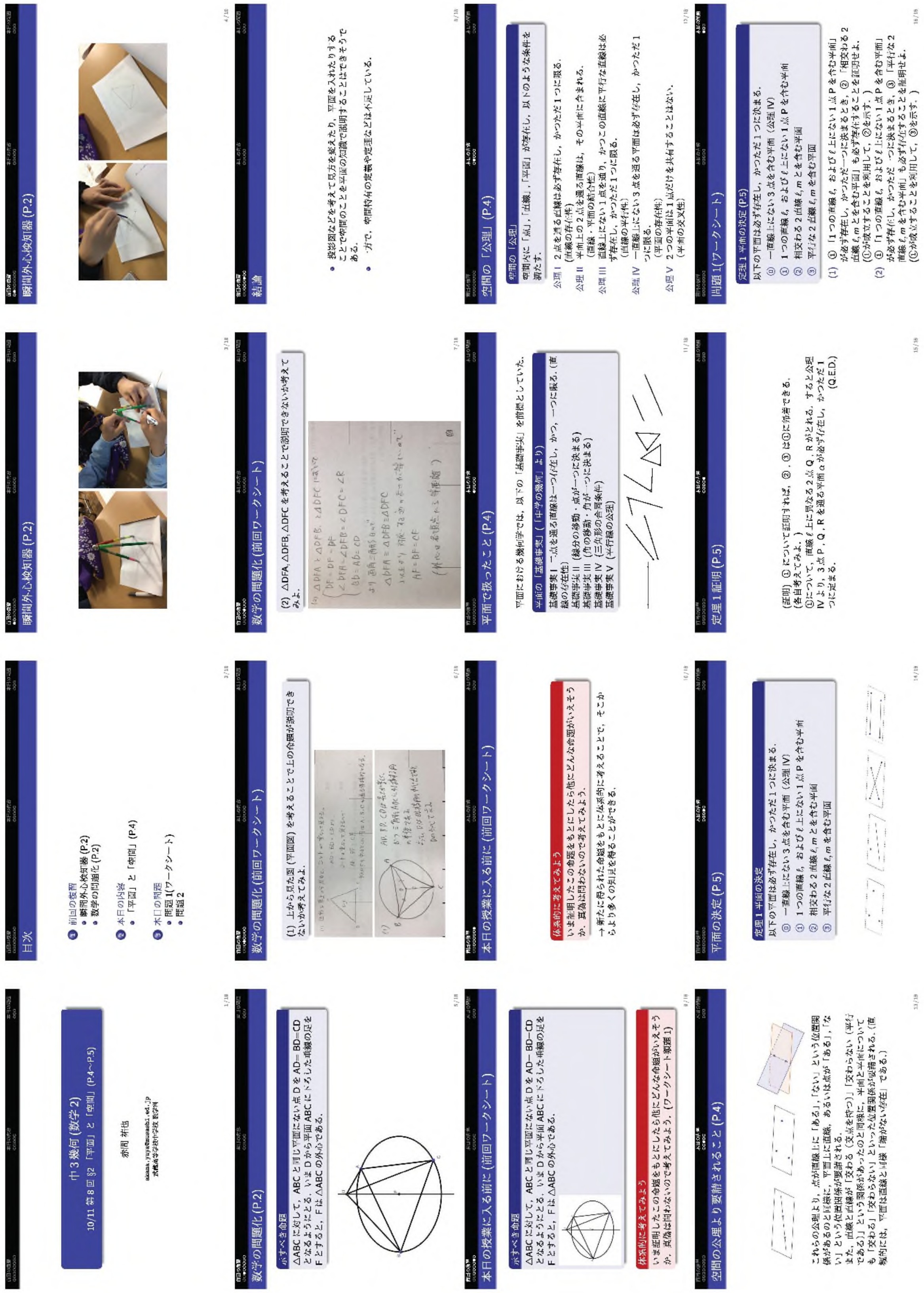
付録 B 授業使用スライド一覧



類題 1(ワークシート)

問題 1 の命題

(1) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，②「相交わる 2 直線 ℓ, m とを含む平面」も必ず存在する．

(2) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，③「平行な 2 直線 ℓ, m を含む平面」も必ず存在する．

について，条件を変えることで別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるか予想してみよ．

問題 2(ワークシート)

(1) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」も必ず存在することを証明せよ．(①が成立することを利用して，⓪を示す．)

(2) ⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，①，②，③ のような平面もただ一つ 存在することを証明せよ．(二つあると矛盾することを示す．)

中 3 幾何 (数学 2)

10/12 第 9 回 §3 平面の平行と交線 (P.6〜P.15)

赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

空間の「公理」(P.4)

空間の「公理」
空間内に「点」,「直線」,「平面」が存在し，以下のような条件を満たす．

公理 I　2 点を通る直線は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．(直線の存在性)

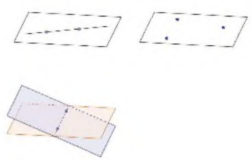
公理 II　平面上の 2 点を通る直線は，その平面に含まれる．(直線・平面の結合性)

公理 III　直線上にない 1 点を通り，かつこの直線に平行な直線は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．(直線の平行性)

公理 IV　一直線上にない 3 点を通る平面は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．(平面の存在性)

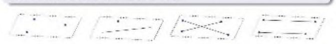
公理 V　2 つの平面は 1 点だけを共有することはない．(平面の交叉性)

空間の「公理」(P.4)



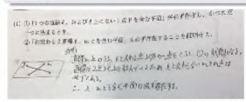
平面の決定 (P.5)

定理 1 平面の決定
以下の平面は必ず存在し，かつただ 1 つに決まる．
- ⓪ 一直線上にない 3 点を含む平面 (公理 IV)
- ① 1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面
- ② 相交わる 2 直線 ℓ, m とを含む平面
- ③ 平行な 2 直線 ℓ, m を含む平面



平面の決定 (前回ワークシート問題 1)

(1) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
②「相交わる 2 直線 ℓ, m とを含む平面」も必ず存在することを証明せよ．



- 直線 ℓ と m の交点を Q とし，直線 m の上に Q と異なる点 P をとると，直線 ℓ と P を含む平面 α がとれる．
- m 上の 2 点 P, Q はともに平面 α 上より，公理 II から直線 m も平面 α 上

平面の決定 (前回ワークシート問題 1)

(2) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
②「平行な 2 直線 ℓ, m とを含む平面」も必ず存在することを証明せよ．

→ 循環論法になってしまうので訂正．

平面の決定 (前回ワークシート問題 2)

(2) ⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」も必ずただ一つ 存在することを証明せよ．

P.5 証明で存在することは示したが，「ただ一つ」存在することはきちんと説明していない．
→ 背理法

平面の決定 (前回ワークシート問題 2)

(2) ⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」も必ずただ一つ 存在することを証明せよ．

(証明) 背理法で証明する．いま直線 ℓ，および ℓ 上にない点 P を含む 2 平面 α, β が存在すると仮定．直線 ℓ 上に 2 点 Q, R をとると，Q, R は直線 ℓ 上にあるので，2 平面 α, β のいずれの上にもある．
すると 3 点 P, Q, R は 2 平面 α, β のいずれの上にもあることになるが，これは一直線上にない 3 点を含む平面がただ 1 つにきまることに矛盾．
以上より，1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面はただ一つに限る．(Q.E.D.)

本日の授業に入る前に (前回ワークシート類題 1)

①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
②「相交わる 2 直線 ℓ, m とを含む平面」も必ず存在することを証明せよ．

⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」も必ずただ一つ 存在することを証明せよ．

体系的に考えてみよう
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．(ワークシート類題 1)

本日の授業に入る前に (前回ワークシート)

体系的に考えてみよう
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

→ 新たに得られた命題をもとに体系的に考えることで，そこからより多くの知見を得ることができる．

平面の平行と交線 (P.6)

空間内には平面，直線，点の 3 種の図形が含まれる．(これらを基本図形と呼ぶ．) これらの位置関係について，どのようなものがありうるかを見てみよう．

点と直線，平面の関係 (P.6)

点 P と直線 ℓ，または平面 α の位置関係は，P が直線 ℓ，または平面 α の上にあるか，ないかのどちらかである．
なお，2 点 P, Q と直線 ℓ について，P, Q が ℓ について同じ側にある，異なる側にある，といったことが定義できたのと同様に，P，Q が平面 α について同じ側にある，あるいは異なる側にある，ということが定義できる．

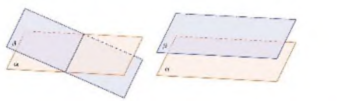
P と Q は平面 α について同じ側　　P と Q は平面 α について異なる側

直線と平面の関係 (P.6)

直線 ℓ と平面 α の位置関係について，ℓ が平面 α 上にある場合と，ない場合が考えられる．
ℓ が平面 α 上にある場合，ℓ は平面 α に① 含まれる，などという．
ℓ が平面 α 上にない場合，ℓ と α の両方に含まれる点 (交点)P が存在する場合としない場合がある．交点 P が存在する場合，ℓ と α は点 P において②交わるという．
交点 P が存在しない場合，ℓ と α は③平行であるといい，$\ell \parallel \alpha$ ($\alpha \parallel \ell$) と書く．

平面と平面の関係 (P.7)

異なる 2 平面 α, β の位置関係について，2 平面が交点を持つ場合と，持たない場合が考えられる．交点を持つ場合，2 平面 α, β は ① 交わるという．公理 V より，2 平面 α, β が交わる場合，交点を少なくとも 2 つもつ．
2 平面 α, β が交点を持たない場合，2 平面は②平行であるといい，$\alpha \parallel \beta$ $(\beta \parallel \alpha)$ とかく．



直線と直線の関係 (P.8)

異なる 2 直線 ℓ, m の位置関係について，2 直線が同一平面上にある場合と，ない場合が考えられる．
同一平面上にある場合，2 直線の位置関係は平面幾何の場合と同様である．2 直線 ℓ, m が交点を持つ場合，①交わるという．2 直線 ℓ, m が交点を持たない場合，2 直線は② 平行であるといい，$\ell \parallel m$ とかく．
2 直線 ℓ, m が同一平面上にない場合，2 直線は交わらず，平行でもない．このとき，2 直線 ℓ, m は③捻れ（ねじれ）の位置にあるという．

中 3 幾何 (数学 2)

10/17 第 10 回 §3 平面の平行と交線 (P.6∼P.15)

赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

点と直線，平面の関係 (P.6)

点 P と直線 ℓ，または平面 α の位置関係は，P が直線 ℓ，または平面 α の上にあるか，ないかのどちらかである．
なお，2 点 P, Q と直線 ℓ について，P, Q が ℓ について同じ側にある，異なる側にある，といったことが定義できたのと同様に，P , Q が平面 α について同じ側にある，あるいは異なる側にある，ということが定義できる．

P と Q は平面 α について同じ側

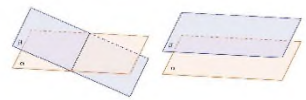
P と Q は平面 α について異なる側

直線と平面の関係 (P.6)

直線 ℓ と平面 α の位置関係について，ℓ が平面 α 上にある場合と，ない場合が考えられる．
ℓ が平面 α 上にある場合，ℓ は平面 α に① 含まれる，などという．
ℓ が平面 α 上にない場合，ℓ と α の両方に含まれる点 (交点)P が存在する場合としない場合がある．交点 P が存在する場合，ℓ と α は点 P において②交わるという．
交点 P が存在しない場合，ℓ と α は③平行であるといい，$\ell \parallel \alpha$ $(\alpha \parallel \ell)$ と書く．

平面と平面の関係 (P.7)

異なる 2 平面 α, β の位置関係について，2 平面が交点を持つ場合と，持たない場合が考えられる．交点を持つ場合，2 平面 α, β は ① 交わるという．公理 V より，2 平面 α, β が交わる場合，交点を少なくとも 2 つもつ．
2 平面 α, β が交点を持たない場合，2 平面は②平行であるといい，$\alpha \parallel \beta$ $(\beta \parallel \alpha)$ とかく．

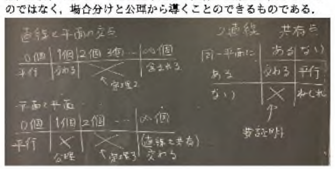


直線と直線の関係 (P.8)

異なる 2 直線 ℓ, m の位置関係について，2 直線が同一平面上にある場合と，ない場合が考えられる．
同一平面上にある場合，2 直線の位置関係は平面幾何の場合と同様である．2 直線 ℓ, m が交点を持つ場合，①交わるという．2 直線 ℓ, m が交点を持たない場合，2 直線は② 平行であるといい，$\ell \parallel m$ とかく．
2 直線 ℓ, m が同一平面上にない場合，2 直線は交わらず，平行でもない．このとき，2 直線 ℓ, m は③捻れ（ねじれ）の位置にあるという．

各基本図形の関係

点，直線，平面といった各基本図形の関係は直観的に定められるのではなく，場合分けと公理から導くことのできるものである．



定理 2(前回ワークシート問題 1)

直線 ℓ と平面 α が交点を持つ場合，交点はただ 1 つに限る．
（2 つ以上の交点を持たない．）

(1) 定理 2 の前提と結論を書け．

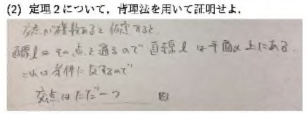
前提 ： 直線 ℓ と平面 α は交点を持つ．
(ℓ は平面 α 上にあるのでもなく，α と平行でもない)

結論 ： 直線 ℓ と平面 α の交点はただ一つに限る．

定理 2(前回ワークシート問題 1)

直線 ℓ と平面 α が交点を持つ場合，交点はただ 1 つに限る．
（2 つ以上の交点を持たない．）

(2) 定理 2 について，背理法を用いて証明せよ．



- 背理法で証明．直線 ℓ と平面 α が 2 点 P, Q を共有すると仮定．
- すると公理 II より，平面 α 上の 2 点 P, Q を通る直線 ℓ は平面 α に含まれる．
- これは直線 ℓ が平面 α と交わることと矛盾．

本日の授業に入る前に (前回ワークシート類題 1)

直線 ℓ と平面 α が交点を持つ場合，交点はただ 1 つに限る．
（2 つ以上の交点を持たない．）

体系的に考えてみよう

いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．(ワークシート類題 1)

本日の授業に入る前に (前回ワークシート)

体系的に考えてみよう

いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

→ 新たに得られた命題をもとに体系的に考えることで，そこからより多くの知見を得ることができる．

3 直線の位置関係 (P.8-9 例題 1)

例題 1

3 直線の位置関係について，どのような場合があるか．3 直線の交点の個数に注目して場合分けせよ．

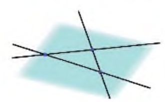
→ 2 直線の場合と同様に，場合分けすればよい．

3 直線の位置関係 (P.8-9 例題 1)

例題 1

3 直線の位置関係について，どのような場合があるか．3 直線の交点の個数に注目して場合分けせよ．

(I) 3 直線が 3 点交点をもつ場合
どの 2 直線も 1 点で交わる (3 直線は同一平面上)



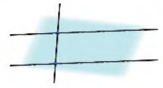
3 直線の位置関係 (P.8-9 例題 1)

例題 1

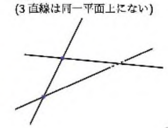
3 直線の位置関係について，どのような場合があるか．3 直線の交点の個数に注目して場合分けせよ．

(II) 3 直線が 2 点交点をもつ場合

(i) どの 2 直線も 1 点で交わる
(3 直線は同一平面上)



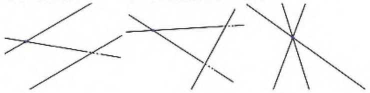
(ii) ねじれた 2 直線と 1 直線が交わる
(3 直線は同一平面上にない)



3 直線の位置関係 (P.8-9 例題 1)

例題 1
3 直線の位置関係について，どのような場合があるか．3 直線の交点の個数に注目して場合分けせよ．

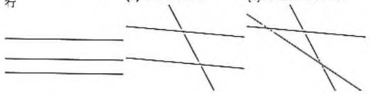
(III) 3 直線が 1 点交点をもつ場合
(i) 平行な 2 直線のうち 1 直線と交わる　(ii) ねじれた 2 直線のうち 1 直線と交わる　(ii)3 直線が 1 点で交わる



3 直線の位置関係 (P.8-9 例題 1)

例題 1
3 直線の位置関係について，どのような場合があるか．3 直線の交点の個数に注目して場合分けせよ．

(III) 3 直線が交点を 1 つももたない場合
(i) 3 直線がすべて平行　(ii) 平行とねじれ　(ii)3 直線ともねじれ



3 平面の位置関係 (前回ワークシート)

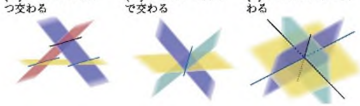
例題 1
3 平面の位置関係について，どのような場合があるか．3 平面の交点，または交線の個数に注目して場合分けせよ．

(I) 3 平面が平行　(II) 平行な 2 平面と 1 平面が交わる

3 平面の位置関係 (前回ワークシート)

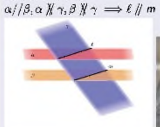
例題 1
3 平面の位置関係について，どのような場合があるか．3 平面の交点，または交線の個数に注目して場合分けせよ．

(III) 3 平面が 2 面ずつ交わる　(IV) 3 平面が 1 交線で交わる　(V) 3 平面が 1 点で交わる



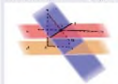
定理 4 (P.10)

定理 4
平行 2 平面を第 3 の平面できれば，切り口の 2 つの交線は平行である．すなわち 3 平面 α, β, γ について α と γ の交線 ℓ，β と γ の交線 m とすると
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma, \beta \not\parallel \gamma \implies \ell /\!/ m$ である．



定理 5 (P.11)

定理 5
平行 2 平面の 1 つに交わる平面は他の一つにもまた交わる．
すなわち 3 平面 α, β, γ について
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma \implies \beta \not\parallel \gamma$ である．



これらの定理の証明を自ら思いつくのは非常に困難である．それを目指す必要はない．
ただし，直観的に何を主張しているのか理解し，証明を追って読めるようにはなってほしい．

定理 4 証明の理解

(証明) $\ell /\!/ m$ であることを示すには，ℓ と m が
①同一平面上にあり，かつ
②交わらない ことを示せばよい．

ℓ, m はともに平面 γ 上にあるため
2 直線は同一平面上にある．……①

次に，ℓ, m が交わらないことを背理法で示す．
2 直線 ℓ と m が共有点 P をもつとすると，P は直線 ℓ 上より平面 α 上にある．また，P は直線 m 上より平面 β 上にある．すなわち点 P は 2 平面 α, β の両方の上にあることになるが，これは $\alpha /\!/ \beta$，すなわち 2 平面 α, β が共有点をもたないことに矛盾．以上より，2 直線 ℓ, m は交わらない．……②

①, ② より $\ell /\!/ m$ (Q.E.D.)

中 3 幾何 (数学 2)

10/19 第 11 回 §3 平面の平行と交線 (P.6～P.15)

赤間 祐也

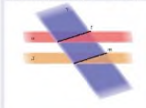
akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

1. 前回の復習
   - 平面と直線の位置関係 (P.10)
   - 本日の授業に入る前に (前回ワークシート類題 1)
2. 本日の内容
   - 定理 6(P.12)

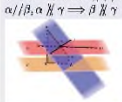
定理 4 (P.10)

定理 4
平行 2 平面を第 3 の平面できれば，切り口の 2 つの交線は平行である．すなわち 3 平面 α, β, γ について α と γ の交線 ℓ，β と γ の交線 m とすると
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma, \beta \not\parallel \gamma \implies \ell /\!/ m$ である．



定理 5 (P.11)

定理 5
平行 2 平面の 1 つに交わる平面は他の一つにもまた交わる．
すなわち 3 平面 α, β, γ について
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma \implies \beta \not\parallel \gamma$ である．



これらの定理の証明を自ら思いつくのは非常に困難である．それを目指す必要はない．
ただし，直観的に何を主張しているのか理解し，証明を追って読めるようにはなってほしい．

定理 4 証明の理解

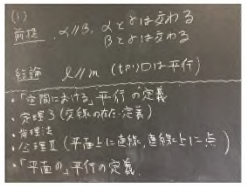
(証明) $\ell /\!/ m$ であることを示すには，ℓ と m が
①同一平面上にあり，かつ
②交わらない ことを示せばよい．

ℓ, m はともに平面 γ 上にあるため
2 直線は同一平面上にある．……①

次に，ℓ, m が交わらないことを背理法で示す．
2 直線 ℓ と m が共有点 P をもつとすると，P は直線 ℓ 上より平面 α 上にある．また，P は直線 m 上より平面 β 上にある．すなわち点 P は 2 平面 α, β の両方の上にあることになるが，これは $\alpha /\!/ \beta$，すなわち 2 平面 α, β が共有点をもたないことに矛盾．以上より，2 直線 ℓ, m は交わらない．……②

①, ② より $\ell /\!/ m$ (Q.E.D.)

定理 4 証明の理解 (前回ワークシート問題 1)



定理 4 証明の理解 (前回ワークシート問題 1)

使われている要素：
空間における 2 直線の平行の定義
(証明) $\ell /\!/ m$ であることを示すには，ℓ と m が
①同一平面上にあり，かつ
②交わらない ことを示せばよい．

使われている要素：
定理 3 (空間における交線の存在と定義)
直線と平面の包含関係
ℓ, m はともに平面 γ 上にあるため
2 直線は同一平面上にある．……①

定理 4 証明の理解 (前回ワークシート問題 1)

使われている要素：
背理法の利用
点と直線と平面の包含関係
空間における 2 平面の平行の定義
次に，ℓ, m が交わらないことを背理法で示す．
2 直線 ℓ と m が共有点 P をもつとすると，P は直線 ℓ 上より平面 α 上にある．また，P は直線 m 上より平面 β 上にある．すなわち点 P は 2 平面 α, β の両方の上にあることになるが，これは $\alpha /\!/ \beta$，すなわち 2 平面 α, β が共有点をもたないことに矛盾．以上より，2 直線 ℓ, m は交わらない．……②

①, ② より $\ell /\!/ m$ (Q.E.D.)

本日の授業に入る前に (前回ワークシート類題 1)

定理 4
平行 2 平面を第 3 の平面できれば，切り口の 2 つの交線は平行である．すなわち 3 平面 α, β, γ について α と γ の交線 ℓ，β と γ の交線 m とすると
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma, \beta \not\parallel \gamma \longrightarrow \ell /\!/ m$ である．

定理 5
平行 2 平面の 1 つに交わる平面は他の一つにもまた交わる．
すなわち 3 平面 α, β, γ について
$\alpha /\!/ \beta, \alpha \not\parallel \gamma \implies \beta \not\parallel \gamma$ である．

体系的に考えてみよう
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．(ワークシート類題 1)

本日の授業に入る前に (前回ワークシート)

体系的に考えてみよう

いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

[illegible]

本日の授業に入る前に (前回ワークシート)

体系的に考えてみよう

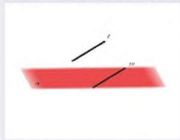
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

→新たに得られた命題をもとに体系的に考えることで，そこからより多くの知見を得ることができる．

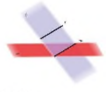
定理 6(P.12)

定理 6

平行 2 直線の一方を含んで他方を含まない (他方とは交わるかもしれない) 平面は他の一方に平行である．
すなわち，2 直線 ℓ, m および平面 α について
$\ell /\!/ m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Longrightarrow \ell /\!/ \alpha$



定理 6 証明の理解



(証明)
$\ell /\!/ m$ より，2 直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．
ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．
すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．
すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．
よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell /\!/ m$ に矛盾．
$\therefore\ \ell /\!/ \alpha$ (Q.E.D.)

定理 6 証明の理解

(証明)

$\ell /\!/ m$ より，2 直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．

ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．
すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．
すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell /\!/ m$ に矛盾．

$\therefore\ \ell /\!/ \alpha$ (Q.E.D.)

中 3 幾何 (数学 2)

10/19 第 12 回 §4〜§6 直線や平面のなす角と垂直 (P.16〜P.21)

赤間 佑也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

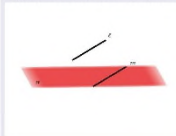
目次

1. 前回の復習
   - 定理 6(P.12)
   - 定理 6 証明の理解 (前回ワークシート問題 1)
   - 体系的に考える (前回ワークシート類題 1)
   - 現実場面の問題に利用する (前回ワークシート問題 2)
2. 本日の内容
   - 空間内の 2 直線のなす角 (P.16)
   - 空間内の平面と直線のなす角 (P.18)
   - 2 平面のなす角 (P.20)

定理 6(P.12)

定理 6

平行 2 直線の一方を含んで他方を含まない (他方とは交わるかもしれない) 平面は他の一方に平行である．
すなわち，2 直線 ℓ, m および平面 α について
$\ell /\!/ m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Longrightarrow \ell /\!/ \alpha$



定理 6 証明の理解

(証明)

$\ell /\!/ m$ より，2 直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．

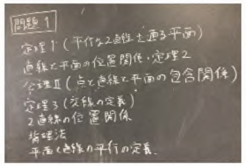
ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．
すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．
すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell /\!/ m$ に矛盾．

$\therefore\ \ell /\!/ \alpha$ (Q.E.D.)

定理 6 証明の理解 (前回ワークシート問題 1)

問

定理 6 の証明を読み，その使われている要素（定義，定理など）をすべて書き出せ．



定理 6 証明の理解

(証明) $\ell /\!/ m$ より，2 直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．

2 直線の平行の定義　or 定理 1(平面の決定)

ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．

直線と平面の位置関係・定理 2，背理法

すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．

点・直線・平面の包含関係 or 公理 II

すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．

交線の定義・定理 3

定理 6 証明の理解

よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell /\!/ m$ に矛盾．

2 直線の位置関係の定義

$\therefore\ \ell /\!/ \alpha$ (Q.E.D.)

2 平面の平行の定義

体系的に考える (前回ワークシート類題 1)

前回ワークシート類題 1

定理 6 について，前提や結論を変えることで新しく別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．(可能なら証明してみよ．)

体系的に考えてみよう

いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

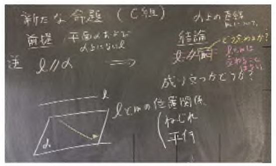
体系的に考える (前回ワークシート類題 1)

前回ワークシート類題 1

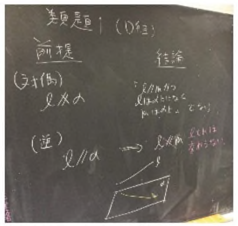
定理 6 について，前提や結論を変えることで新しく別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．(可能なら証明してみよ．)

[illegible]

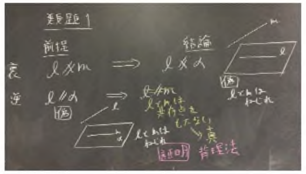
体系的に考える (前回ワークシート類題 1 C 組)



体系的に考える (前回ワークシート類題 1 D 組)

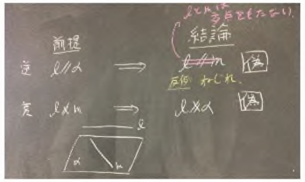


体系的に考える (前回ワークシート類題 1 B 組)



12/23

体系的に考える (前回ワークシート類題 1 A 組)



13/23

体系的に考える (前回ワークシート 類題 1)

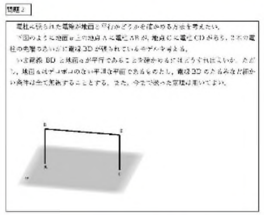
体系的に考えてみよう

いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．

→ 新たに得られた命題をもとに体系的に考えることで，そこからより多くの知見を得ることができる．

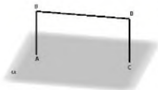
14/23

現実場面の問題に利用する (前回ワークシート問題 2)



15/23

現実場面の問題に利用する (前回ワークシート問題 2)



(解答例)
定理 6 の利用を考える．平面 α と直線 BD が平行であることをいうには，例えば 4 点 ABCD が同一平面上であることを前提に直線 BD と直線 AC の平行をいえばよい．

いま電柱 AB, CD が地面と垂直で AB = CD である場合について考えると，例えば ∠B, ∠D が直角 (すなわち四角形 ABCD が長方形) であればよい．

※ この問題は自分で前提を立てて考える問題であるので，明確な答えはない．ただし，前提が決まれば答えは一つである．

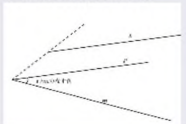
16/23

空間内の 2 直線のなす角 (P.16)

空間内で交わる 2 直線だけではなく，ねじれの位置にある 2 直線についてもなす角を定義する

定義 1 空間内の 2 直線のなす角 (P.17)

平面上の 2 直線 ℓ, m のなす角を，同一平面上にある，ℓ, m と平行な 2 直線のなす角で定義する．



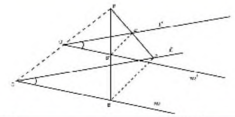
17/23

空間内の 2 直線のなす角 (P.16)

定義 1 のように角が定義できるのは，以下の定理が成りたつためである．

定理 10 平行な平面上のなす角 (P.16)

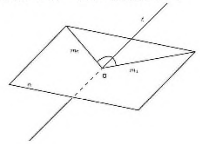
点 O において交わる 2 直線 ℓ, m に対し，$\ell \parallel \ell', m \parallel m'$ なる 2 直線 ℓ', m' が点 O′ で交わるとする．このとき，ℓ, m のなす角と ℓ', m' のなす角は等しい．(または補角をなす．)



18/23

空間内の平面と直線のなす角 (P.18)

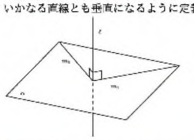
空間内の平面 α と直線 ℓ のなす角を
「平面 α 上の直線 m と直線 ℓ のなす角」
で定義すると，一通りには決まらない．



19/23

空間内の平面と直線のなす角 (P.18)

一方で，空間内の平面 α と直線 ℓ が垂直になるとき，平面 α 上のいかなる直線とも垂直になるように定義する．



定義 2 直線と平面の垂直 (P.18)

直線 ℓ が平面 α 上にあるいかなる直線とも垂直であるとき，直線 ℓ と平面 α は垂直，すなわち
$\ell \perp \alpha$
と定義する．

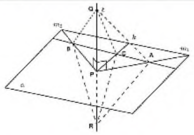
20/23

空間内の平面と直線のなす角 (P.18)

実際には平面上の 2 直線と垂直であれば十分である．

定理 11 直線と平面の垂直 (P.18)

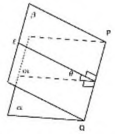
直線 ℓ が平面 α 上の 2 直線 m_1, m_2 と垂直であるとき，平面 α 上の任意の直線は ℓ と垂直に交わる．
すなわち，$\ell \perp m_1, \ell \perp m_2 \Longrightarrow \ell \perp \alpha$



21/23

平面角 (P.20)

2 平面のなす角を，2 平面上にある直線のなす角で定義するとやはり 1 通りには定まらない．
そこで 2 平面の交線に垂直な 2 直線のなす角で定義する．これを「平面角」と呼ぶ．



(上図は 2 つの半平面 α, β のつくる平面角である)

22/23

2 平面の垂直 (P.21)

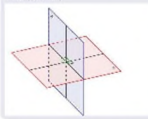
2 つの (半) 平面 α, β の平面角が直角であるとき，2 つの (半) 平面 α, β は直角であるといい，$\alpha \perp \beta$ と書く．

定義 6 平面と平面の垂直

2 平面 α, β について

$$\alpha \perp \beta \iff \alpha と \beta の平面角が \angle R$$

と定義する．



23/23

中 3 幾何 (数学 2)

10/31 第 13 回 §7 三垂線の定理 (P.22〜P.25)

赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

1/13

目次

2/13

今まで学んできたこと

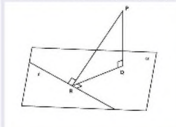
- 空間の中には「点」「直線」「平面」という 3 種類の基本図形があり，包含関係が成り立つこと．
- 点と直線，点と平面，直線と平面，平面と平面，および直線と直線についてそれぞれ位置関係が定義されること．
  (おもに交点の個数についての場合分けによる．)
- 平面と直線の位置関係について，いくつかの定理が成り立つこと．
- 直線と直線，直線と平面，および平面と平面について，垂直が定義されること．

3/13

定理 12 三垂線の定理 (P.22)

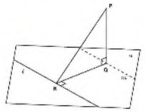
定理 12 三垂線の定理 (P.22)

平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q，Q から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると，直線 PR は ℓ に垂直である．すなわち，PQ $\perp \alpha$，QR $\perp \ell \Longrightarrow$ PR $\perp \ell$



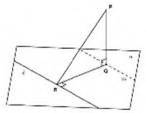
4/13

定理 12 三垂線の定理 (P.22)



(証明)
PQ ⊥ α , QR ⊥ ℓ であると仮定し，PR ⊥ ℓ を導く．いま Q を通り ℓ に h 平行な α 上の直線 m をとる．すると，PQ ⊥ α より
PQ ⊥ m ……①
また，QR ⊥ ℓ, ℓ // m より QR ⊥ m ……②
よって定理 11 より，m は平面 PQR と垂直となる．

定理 12 三垂線の定理 (P.22)



(証明)
ここで ℓ // m より，ℓ も平面 PQR と垂直となる．(本当か？)
すなわち，ℓ は平面 PQR 上のいかなる直線とも直交するので，
ℓ ⊥PR (Q.E.D.)

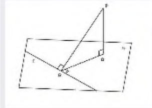
定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

定理 12 から，ただちに以下のことが導ける．一般に，以下の系も含めて三垂線の定理と呼ぶ．

定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

(1) 平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q , P から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると

$$PQ \perp \alpha, PR \perp \ell \Longrightarrow QR \perp \ell$$



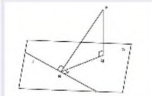
定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

定理 12 から，ただちに以下のことが導ける．一般に，以下の系も含めて三垂線の定理と呼ぶ．

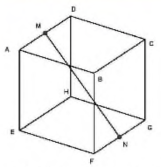
定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

(2) 平面 α 外の 1 点 P より α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R，α 上 R を通る ℓ の垂線に P から降ろした垂線の足を Q とすると

$$PR \perp \ell, QR \perp \ell, PQ \perp QR \Longrightarrow PQ \perp \alpha$$

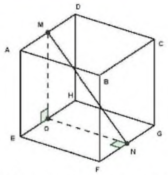


三垂線の定理の利用



上の立方体において，M は AD の中点，N は FG の中点とすると
MN ⊥ FG

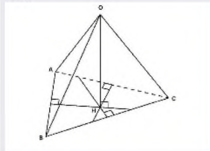
三垂線の定理の利用



(証明) いま MO ⊥ 平面 HEFG (要証明?)，ON ⊥ PG より
三垂線定理から MN ⊥ FG (Q.E.D.)

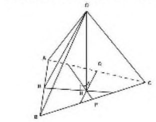
定理 13(P.24)

定理 13(P.24)
三角錐 O-ABC において，OA= OB = OC であるとき (三角錐の稜線がすべて等しいとき)
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は，△ABC の外心と一致する．



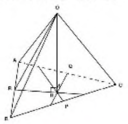
定理 13(P.24)

(教科書の証明)
BC , CA , AB の中点をそれぞれ P,Q,R とし，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とおく．いま点 H が △ABC の外心であることを示せばよい．
△OAB について，条件より △OAB は二等辺三角形．よって OR を結ぶと，OR ⊥ AB ……①



定理 13(P.24)

(教科書の証明)
一方，条件より OH ⊥ (平面 ABC) ……②
よって三垂線の定理より，AB ⊥RH ……③
同様に，△OBC について考えると，OP ⊥ BC , OH ⊥ (平面 ABC) より三垂線の定理から BC ⊥ PH ……④
③ , ④ より，H は AB , BC の垂直二等分線の交点にあるため，H は △ABC の外心と一致する．



中 3 幾何 (数学 2)

11/01 第 14 回 §7 ～ §8 三垂線の定理・三角錐の体積 (P.22～P.27)

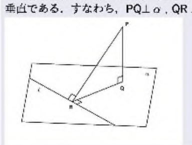
赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

定理 12 三垂線の定理 (P.22)

定理 12 三垂線の定理 (P.22)
平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q , Q から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると，直線 PR は ℓ に垂直である．すなわち，PQ⊥ α , QR ⊥ ℓ ⟹PR ⊥ ℓ



定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

定理 12 から，ただちに以下のことが導ける．一般に，以下の系も含めて三垂線の定理と呼ぶ．

定理 12 系 三垂線の定理 (P.23)

(1) 平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q , P から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると

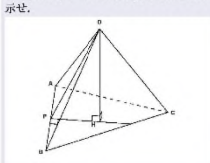
$$PQ \perp \alpha, PR \perp \ell \Longrightarrow QR \perp \ell$$

(2) 平面 α 外の 1 点 P より α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R，α 上 R を通る ℓ の垂線に P から降ろした垂線の足を Q とすると

$$PR \perp \ell, QR \perp \ell, PQ \perp QR \Longrightarrow PQ \perp \alpha$$

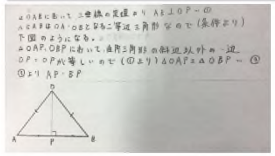
前回ワークシート問題 1

前回ワークシート問題 1
OA = OB = OC である三角錐 O-ABC において，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H, H から AB に下ろした垂線の足を P とすると，P は AB の中点であることを三垂線の定理を用いて示せ．



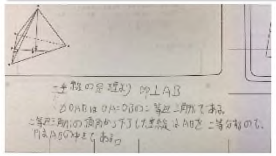
前回ワークシート問題 1

前回ワークシート問題 1
OA = OB = OC である三角錐 O-ABC において，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H, H から AB に下ろした垂線の足を P とすると，P は AB の中点であることを三垂線の定理を用いて示せ．



前回ワークシート問題 1

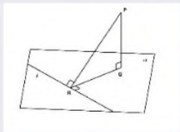
前回ワークシート問題 1
OA = OB = OC である三角錐 O-ABC において，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H, H から AB に下ろした垂線の足を P とすると，P は AB の中点であることを三垂線の定理を用いて示せ．



前回ワークシート問題 2

前回ワークシート問題 2
以下の三垂線の逆定理を背理法を用いて証明せよ.
平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q，P から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると

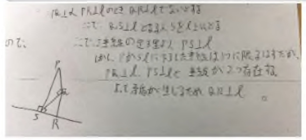
$$PQ \perp \alpha, PR \perp \ell \Longrightarrow QR \perp \ell$$



前回ワークシート問題 2

前回ワークシート問題 2
以下の三垂線の逆定理を背理法を用いて証明せよ.
平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q，P から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると

$$PQ \perp \alpha, PR \perp \ell \Longrightarrow QR \perp \ell$$



本日の授業に入る前に

定理 12 三垂線の定理 (P.22)
平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q，Q から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると，直線 PR は ℓ に垂直である．すなわち，$PQ \perp \alpha$，$QR \perp \ell \Longrightarrow PR \perp \ell$

前回ワークシート問題 1
$OA = OB = OC$ である三角錐 O-ABC において，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H, H から AB に下ろした垂線の足を P とすると，P は AB の中点であることを三垂線の定理を用いて示せ.

体系的に考えてみよう
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう．(ワークシート問題 1)

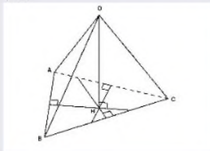
本日の授業に入る前に

体系的に考えてみよう
いま証明したこの命題をもとにしたら他にどんな命題がいえそうか．真偽は問わないので考えてみよう.

→ 新たに得られた命題をもとに体系的に考えることで，そこからより多くの知見を得ることができる.

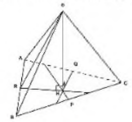
定理 13(P.24)

定理 13(P.24)
三角錐 O-ABC において，$OA = OB = OC$ であるとき (三角錐の稜線がすべて等しいとき)
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は，$\triangle ABC$ の外心と一致する.



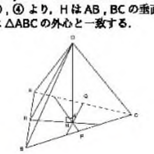
定理 13(P.24)

(教科書の証明)
BC，CA，AB の中点をそれぞれ P,Q,R とし，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とおく．いま点 H が $\triangle ABC$ の外心であることを示せばよい.
$\triangle OAB$ について，条件より $\triangle OAB$ は二等辺三角形．よって OR を結ぶと，$OR \perp AB$ ……①



定理 13(P.24)

(教科書の証明)
一方，条件より $OH \perp$ (平面 ABC) ……②
よって三垂線の定理より，$AB \perp RH$ ……③
同様に，$\triangle OBC$ について考えると，$OP \perp BC$，$OH \perp$ (平面 ABC) より三垂線の定理から $BC \perp PH$ ……④
③，④ より，H は AB，BC の垂直二等分線の交点にあるため，H は $\triangle ABC$ の外心と一致する.



定理 13 の利用

この定理 13 を用いると，外心の位置さえ求められれば，ピタゴラスの定理などを用いることで三角錐の体積を求めることができる.

復習 外心の位置が簡単に決まる三角形
(1) 直角三角形：外心は斜辺の中点
(2) 正三角形：外心は重心 (内心・垂心) と一致 (中線を 1:2 に内分する)
(3) 二等辺三角形：外心は頂角と底辺の中点を結んだ線分上 (相似を用いて位置決定)

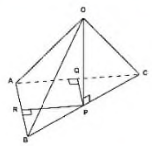
これ以外は余弦定理 (三角比：三学期に扱う) を利用するか.

三角錐の体積 (P.26)

例題 2(P.26)
以下の三角錐について底面積，高さを求めることでその体積を求めよ.
ただし，角錐の体積が (底面積) × (高さ) × $\frac{1}{3}$ であることは証明なしに用いてよい.
(1) $AB = 3$，$AC = 4$，$BC = 5$，$OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC
(2) $AB = BC = CA = 2$，$OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

三角錐の体積 (P.26)

(1) $AB = 3$，$AC = 4$，$BC = 5$，$OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC



三角錐の体積 (P.26)

(1) $AB = 3$，$AC = 4$，$BC = 5$，$OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つので，底面である $\triangle ABC$ は $\angle A = \angle R$ である直角三角形となる．よって，外心は斜辺 BC の中点 P と一致する．いま $\triangle OPB$ が直角三角形となるのでピタゴラスの定理を用いると

$$\begin{aligned} OP^2 + BP^2 &= OB^2 \\ OP^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 7^2 \\ OP^2 &= 49 - \frac{25}{4} = \frac{196 - 25}{4} \\ &= \frac{171}{4} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

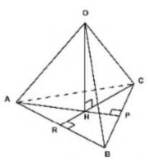
(1) $AB = 3$，$AC = 4$，$BC = 5$，$OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC

$$OP = \frac{\sqrt{9 \times 19}}{2} = \frac{3\sqrt{19}}{2} \quad (\because OP > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{三角錐 O-ABC の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times OP \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times AC\right) \times OP \\ &= \frac{1}{6} \times 3 \times 4 \times \frac{3\sqrt{19}}{2} \\ &= \underline{3\sqrt{19}\ (Ans.)} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) $AB = BC = CA = 2$，$OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC



(2) $AB = BC = CA = 2$，$OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

$\triangle ABC$ は正三角形であるから，外心は重心と一致する．よって BC の中点を P とすると，$AH : HP = 2 : 1$ が成立.
まず AP の長さを求めると，$\triangle ABP$ は正三角形の半分なので，$AB:BP:AP = 2:1:\sqrt{3}$.
よって $AP = \sqrt{3}$ となるので，$AH = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
すると，$\triangle OAH$ でピタゴラスの定理が使えるので

$$\begin{aligned} AH^2 + OH^2 &= OA^2 \\ \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + OH^2 &= 3^2 \\ OH^2 &= 9 - \frac{12}{9} = \frac{69}{9} \\ OH &= \frac{\sqrt{69}}{3} \quad (\because OH > 0) \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) $AB = BC = CA = 2$，$OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

$$\begin{aligned} \therefore (\text{三角錐 O-ABC の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times OH \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times BC \times AP\right) \times OH \\ &= \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{69}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 \times 23}}{9} \\ &= \underline{\frac{\sqrt{23}}{3}\ (Ans.)} \end{aligned}$$

中 3 幾何 (数学 2)

11/07 第 15 回 §8 〜 §10 体積 (P.26〜P.33)

赤間 祐也

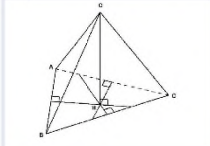
akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

1. 前回の概要
   - 定理 13(P.24)
   - 前回ワークシートの内容
2. 本日の内容
   - 体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)
   - 体積公式の導出 (P.30)

定理 13(P.24)

定理 13(P.24)
三角錐 O-ABC において，$OA = OB = OC$ であるとき (三角錐の稜線がすべて等しいとき)
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は，$\triangle ABC$ の外心と一致する．



定理 13 の利用

この定理 13 を用いると，外心の位置さえ求められれば，ピタゴラスの定理などを用いることで三角錐の体積を求めることができる．

復習 外心の位置が簡単に決まる三角形
(1) 直角三角形：外心は斜辺の中点
(2) 正三角形：外心は重心 (内心・垂心) と一致 (中線を 1:2 に内分する)
(3) 二等辺三角形：外心は頂角と底辺の中点を結んだ線分上 (相似を用いて位置決定)

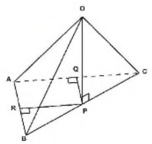
これ以外は余弦定理 (三角比：三学期に扱う) を利用するか．

三角錐の体積 (P.26)

例題 2(P.26)：前回ワークシート問題 1
以下の三角錐について底面積，高さを求めることでその体積を求めよ．
ただし，角錐の体積が (底面積) × (高さ) × $\frac{1}{3}$ であることは証明なしに用いてよい．
(1) $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC
(2) $AB = BC = CA = 2$, $OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

三角錐の体積 (P.26)

(1) $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC



三角錐の体積 (P.26)

(1) $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つので，底面である $\triangle ABC$ は $\angle A = \angle R$ である直角三角形となる．よって，外心は斜辺 BC の中点 P と一致する．いま $\triangle OPB$ が直角三角形となるのでピタゴラスの定理を用いると

$$\begin{aligned} OP^2 + BP^2 &= OB^2 \\ OP^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 7^2 \\ OP^2 &= 49 - \frac{25}{4} = \frac{196-25}{4} \\ &= \frac{171}{4} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

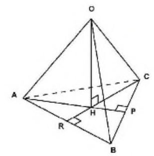
(1) $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $OA = OB = OC = 7$ である三角錐 O-ABC

$$OP = \frac{\sqrt{9 \times 19}}{2} = \frac{3\sqrt{19}}{2} \quad (\because OP > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{三角錐 O-ABC の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times OP \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times AC\right) \times OP \\ &= \frac{1}{6} \times 3 \times 4 \times \frac{3\sqrt{19}}{2} \\ &= 3\sqrt{19} \ (Ans.) \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) $AB = BC = CA = 2$, $OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC



(2) $AB = BC = CA = 2$, $OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

$\triangle ABC$ は正三角形であるから，外心は重心と一致する．よって BC の中点を P とすると，$AH : HP = 2 : 1$ が成立．
まず AP の長さを求めると，$\triangle ABP$ は正三角形の半分なので，$AB:BP:AP = 2:1:\sqrt{3}$．
よって $AP = \sqrt{3}$ となるので，$AH = \frac{2}{3}\sqrt{3}$．
すると，$\triangle OAH$ でピタゴラスの定理が使えるので

$$\begin{aligned} AH^2 + OH^2 &= OA^2 \\ \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + OH^2 &= 3^2 \\ OH^2 &= 9 - \frac{12}{9} = \frac{69}{9} \\ OH &= \frac{\sqrt{69}}{3} \quad (\because OH > 0) \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) $AB = BC = CA = 2$, $OA = OB = OC = 3$ である三角錐 O-ABC

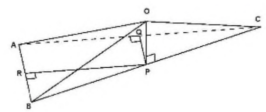
$$\begin{aligned} \therefore (\text{三角錐 O-ABC の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times OH \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times BC \times AP\right) \times OH \\ &= \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{69}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 \times 23}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{23}}{3} \ (Ans.) \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

前回ワークシート問題 2
下の条件を満たす三角錐 O-ABC の体積を求めよ．
(1) $OA = OB = OC = 7$, $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$
(2) $OA = OB = OC = 2$, $AB = BC = CA = 1$
(3) $OA = OB = OC = 4$, $AB = AC = 5$, $BC = 6$

三角錐の体積 (P.26)

(1) $OA = OB = OC = 7$, $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$



三角錐の体積 (P.26)

(1) $OA = OB = OC = 7$, $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つので，$\triangle ABC$ は直角三角形．よって斜辺 BC の中点 P が外心となる．
いま $\triangle OPB$ でピタゴラスの定理を用いると

$$\begin{aligned} OP^2 + BP^2 &= OB^2 \\ OP^2 &= 7^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 \\ &= 49 - \frac{169}{4} \\ &= \frac{196-169}{4} \\ &= \frac{27}{4} \\ OP &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

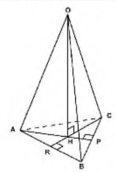
(1) $OA = OB = OC = 7$, $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$

よって三角錐 O-ABC の体積は

$$\begin{aligned} (\triangle ABC) \times OH \times \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) $OA = OB = OC = 2$, $AB = BC = CA = 1$



三角錐の体積 (P.26)

(2) $OA = OB = OC = 2$, $AB = BC = CA = 1$

$\triangle ABC$ は正三角形より，O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は $\triangle ABC$ の重心と一致．
$\triangle ABP$ の辺の比より $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$，重心は中線を $2:1$ に内分するので，$AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$．
いま $\triangle OAH$ でピタゴラスの定理を用いると

$$\begin{aligned} OH^2 + AH^2 &= OA^2 \\ OH^2 + \frac{1}{3} &= 4 \\ OH^2 &= 4 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

三角錐の体積 (P.26)

(2) OA = OB = OC = 2 , AB = BC = CA = 1

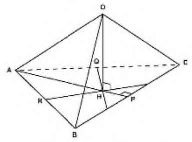
$$\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

となる．よって三角錐 O-ABC の体積は

$$(\triangle \mathrm{ABC}) \times \mathrm{OH} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{11}{3}} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

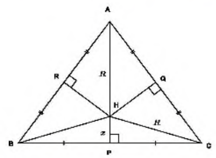
三角錐の体積 (P.26)

(3) OA = OB = OC = 4 , AB = AC = 5 , BC = 6



三角錐の体積 (P.26)

(3) OA = OB = OC = 4 , AB = AC = 5 , BC = 6



三角錐の体積 (P.26)

(3) OA = OB = OC = 4 , AB = AC = 5 , BC = 6

△ABC は AB = AC の二等辺三角形であるので，底辺 BC の垂直二等分線は頂点 A を通る．すなわち BC の中点を P とすると，O から底面 ABC に下ろした垂線の足 H は AB 上にある．よってこの位置を求める．

すると △ABP について，△ABP は直角三角形で AB = 5，BP = 3 より AP = 4．

いま △ABP ∽ △AHR より

AR : AH = AP : AB

$$\frac{5}{2} : \mathrm{AH} = 4 : 5$$
$$4\mathrm{AH} = \frac{25}{2}$$
$$\mathrm{AH} = \frac{25}{8}$$

三角錐の体積 (P.26)

(3) OA = OB = OC = 4 , AB = AC = 5 , BC = 6

よって △OHA においてピタゴラスの定理を用いると

$$\mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2 = \mathrm{OA}^2$$
$$\mathrm{OH}^2 + \left(\frac{25}{8}\right) = 4^2$$
$$\mathrm{OH}^2 = 16 - \frac{625}{64} = \frac{1024 - 625}{64} = \frac{399}{64}$$
$$\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{399}}{8}$$

三角錐の体積 (P.26)

(3) OA = OB = OC = 4 , AB = AC = 5 , BC = 6

以上より，三角錐 O-ABC の体積は

$$(\triangle \mathrm{ABC}) \times \mathrm{OH} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{399}}{8} \times \frac{1}{3} = \underline{\frac{\sqrt{399}}{2}\ (Ans.)}$$

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

平面幾何においては，面積を以下のように定義した．

復習：面積の定義

(1) 一辺の長さが単位長さである正方形の面積を単位面積と定義する．
(2) 合同な図形の面積は等しい．
(3) 2 つの図形を「あわせて」できる図形の面積はもとの 2 つの図形の面積の和となる．

この 3 つさえあれば，等積変形可能性が導けて任意の線分からなる図形の面積が定義できるのであった．
同様の定義は体積でもできるかどうか．

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

体積の定義案

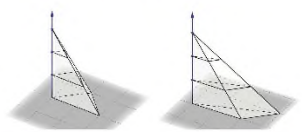
(1) 一辺の長さが単位長さである立方体の体積を単位体積と定義する．
(2) 合同な空間図形の体積は等しい．
(3) 2 つの空間図形を「あわせて」できる図形の体積はもとの 2 つの空間図形の面積の和となる．

ここから，立体図形の等積変形が導けるかどうか．

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

定理？

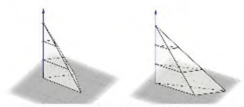
底面積および高さが同じである角錐の体積は等しい．



体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

定理？

底面積および高さが同じである角錐の体積は等しい．



この定理が体積の (2)，(3) の操作（分解合同と呼ぶ）から示せるかどうか，ということはそれほど自明ではない．1900 年には「ヒルベルトの第 3 問題」として未解決問題のリストに加えられ，同年デーンによって否定的に解決された．そのため，これを体積における公理として認めることにする．

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

体積の定義

(1) 一辺の長さが単位長さである立方体の体積を単位体積と定義する．
(2) 合同な空間図形の体積は等しい．
(3) 2 つの空間図形を「あわせて」できる図形の体積はもとの 2 つの空間図形の面積の和となる．
(4) 同一平面上におかれた **2** つの立体を，この平面に平行などんな平面で切っても **2** つの切り口の面積が常に等しいとき，この **2** つの立体の体積は等しい．
(一般に「カヴァリエリの原理」と呼ばれる．)

カヴァリエリの原理の系 (P.30)

カヴァリエリの原理から直ちに以下の事実が導ける．

系 (P.30)

(1) 底面積と高さの等しい 2 つの角柱の体積は等しい．
(2) 底面積と高さの等しい 2 つの角錐の体積は等しい．

(考え方)

(i) 柱を底面に平行な平面で切断した断面は，底面と合同である．(∵ 側面は長方形より)
(ii) 錐を底面に平行な平面で切断した断面は，底面と相似である．(∵ 側面は三角形より，中点連結定理から)

定理 14(P.30)

定理 14 角柱の体積

(1) 縦，横，高さが a, b, c である直方体の体積は abc である．
(2) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 三角柱の体積は Sh である．
(3) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 角柱の体積は Sh である．

(証明)

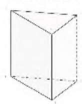
(i) a, b, c が自然数のとき，直方体は全部で abc 個の 1 辺の長さが 1 の立方体に分割できるので，体積は abc.
a, b, c が有理数のとき，自然数になるように a, b, c に自然数を掛けて拡大すればよい．
(ii) 直角三角柱は，2 つ合わせると直方体に帰着できる．
一般の三角柱は，底面を直角三角形に等積変形することでカヴァリエリの原理より体積を変えずに直角三角柱へと変形できる．

定理 15(P.30)

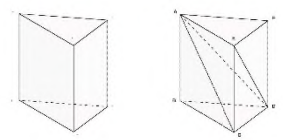
定理 15 角錐の体積

(i) 三角錐の体積は，同じ高さである三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である．
(ii) 角錐の体積は，同じ高さである角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である．

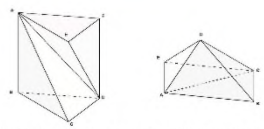
(証明)　(i) 三角柱を体積の等しい 3 つの三角錐に分割できることが示せればよい．下図の三角柱 AEF-BCD を，体積の等しい 3 つの三角錐に分割する．



定理 15(P.30)



定理 15(P.30)



三角柱を，同体積の 3 つの三角錐に分割することができたので，
三角錐の体積は三角柱の $\frac{1}{3}$

中3幾何 (数学 2)

11/08 第 16 回 §11 円柱・円錐・球の体積 (P.34〜P.37)

赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

1. 前回の復習
   - 体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)
   - 前回のワークシートの内容
2. 本日の内容
   - 円柱・円錐・球の体積 (P.34)
   - 球の体積
   - 球の表面積

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

体積の定義

(1) 一辺の長さが単位長さである立方体の体積を単位体積と定義する.

(2) 合同な空間図形の体積は等しい.

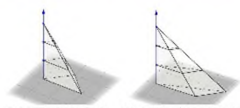
(3) 2 つの空間図形を「あわせて」できる図形の体積はもとの 2 つの空間図形の面積の和となる.

(4) **同一平面上におかれた 2 つの立体を, この平面に平行などんな平面で切っても 2 つの切り口の面積が常に等しいとき, この 2 つの立体の体積は等しい.**
(一般に「カヴァリエリの原理」と呼ばれる.)

体積の定義とカヴァリエリの原理 (P.28)

定理?

底面積および高さが同じである角錐の体積は等しい.



この定理が体積の (2), (3) の操作 (分解合同と呼ぶ) から示せるかどうか, ということはそれほど自明ではない. 1900 年には「ヒルベルトの第 3 問題」として未解決問題のリストに加えられ, 同年デーンによって否定的に解決された. そのため, これを体積における公理として認めることにする.

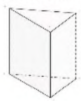
定理 15(P.30)

定理 15 角錐の体積

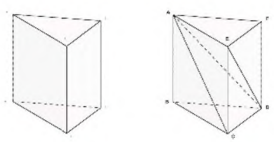
(i) 三角錐の体積は, 同じ高さである三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である.

(ii) 角錐の体積は, 同じ高さである角柱の体積の $\frac{1}{3}$ である.

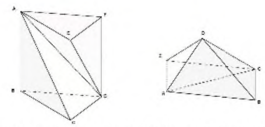
(証明) (i) 三角柱を体積の等しい 3 つの三角錐に分割できることが示せればよい. 下図の三角柱 AEF-BCD を, 体積の等しい 3 つの三角錐に分割する.



定理 15(P.30)



定理 15(P.30)

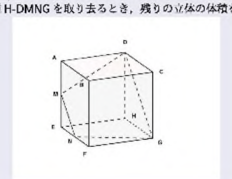


三角柱を, 同体積の 3 つの三角錐に分割することができたので, 三角錐の体積は三角柱の $\frac{1}{3}$

前回のワークシートの内容

問題 1

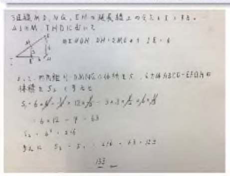
1 辺の長さが 6 である立方体 ABCD-EFGH において, 点 M,N を辺 AE, EF の中点とする. いま立方体を平面 MNGD で切断し, 四角錐 H-DMNG を取り去るとき, 残りの立体の体積を求めよ.



前回のワークシートの内容

問題 1

1 辺の長さが 6 である立方体 ABCD-EFGH において, 点 M,N を辺 AE, EF の中点とする. いま立方体を平面 MNGD で切断し, 四角錐 H-DMNG を取り去るとき, 残りの立体の体積を求めよ.



前回のワークシートの内容

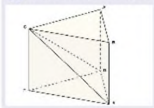
問題 2

底面が面積 $4\sqrt{3}\text{cm}^2$ の正三角形で, 高さが 3cm の正三角柱 ABC-DEF がある. 頂点 C,D,E を通る平面でこの立体を切ったとき

(1) 辺 DE の長さを求めなさい.

(2) 切り口 △CDE の面積を求めなさい.

(3) 頂点 F と切り口の平面 CDE との距離を求めなさい.



前回のワークシートの内容

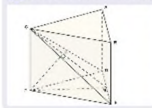
問題 2

底面が面積 $4\sqrt{3}\text{cm}^2$ の正三角形で, 高さが 3cm の正三角柱 ABC-DEF がある. 頂点 C,D,E を通る平面でこの立体を切ったとき

(1) 辺 DE の長さを求めなさい.

(2) 切り口 △CDE の面積を求めなさい.

(3) 頂点 F と切り口の平面 CDE との距離を求めなさい.



前回のワークシートの内容

(1) 辺 DE の長さを求めなさい.

DE の中点を M とおくと, FM : EM $= \sqrt{3} : 1$. EM$= x$ とおくと, 条件より

$$\begin{aligned} 2x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2} &= 4\sqrt{3} \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 (\because x > 0) \end{aligned}$$

よって, DE $= 2x =$ **4** cm (*Ans.*)

前回のワークシートの内容

(2) 切り口 △CDE の面積を求めなさい.

△CFM は直角三角形より

$$\begin{aligned} \text{CM}^2 &= \text{CF}^2 + \text{FM}^2 = 3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 12 = 21 \\ \text{CM} &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

となる. また, △CDE は CD = CE の二等辺三角形より, CM ⊥ DE. よって求める面積は

$$\triangle\text{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \text{DE} \cdot \text{CM} = \frac{4\sqrt{21}}{2} = \mathbf{2\sqrt{21}}\text{cm}^2 \ (\textit{Ans.})$$

前回のワークシートの内容

(3) 頂点 F と切り口の平面 CDE との距離を求めなさい.

F から平面 CDE に下ろした垂線の足を H とすると, 求めるものは FH の長さである. いま三角錐 C-DEF に注目すると, 体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle\text{DEF} \cdot \text{CF} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3 = 4\sqrt{3}\text{cm}^3$$

となる. 一方で, 三角錐 C-DEF の体積は, $\frac{1}{3} \cdot \triangle\text{CDF} \cdot \text{FH}$ と表されるので

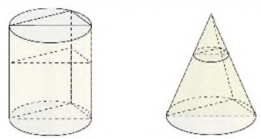
$$\begin{aligned} 4\sqrt{3} &= \frac{1}{3} \cdot \text{FH} \cdot \triangle\text{CDE} \\ 4\sqrt{3} &= \frac{2\sqrt{21}}{3}\text{FH} \\ \text{FH} &= \frac{6}{\sqrt{7}} = \underline{\frac{\mathbf{6\sqrt{7}}}{\mathbf{7}}\ \text{cm} \ (\textit{Ans.})} \end{aligned}$$

円柱・円錐の体積

定理 16 円柱・円錐の体積

(i) 底面積が S, 高さが h である (直・斜) 円柱の体積は, Sh.

(ii) 底面積が S, 高さが h である (直・斜) 円錐の体積は, $\frac{1}{3}Sh$.



円柱・円錐の体積

定理 16 円柱・円錐の体積 (P.34)

(i) 底面積が S, 高さが h である (直・斜) 円柱の体積は, Sh.

(ii) 底面積が S, 高さが h である (直・斜) 円錐の体積は, $\frac{1}{3}Sh$.

(証明)

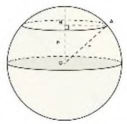
(i) 円柱の底面に内接する三角形を底面にもち, 高さが円柱と同じである三角柱をとる. すると, 底面に平行ないかなる平面で切った切断面も円柱と三角柱の断面積の比は一定となる.

(ii) 円錐の底面に内接する三角形を底面にもち, 頂点が円錐と同じである三角錐をとる. すると, 底面に平行ないかなる平面で切った切断面も円錐と三角錐の断面積の比は一定となる.

球の体積

定義 8 球の定義 (P.35)
空間内において，中心からの距離が一定である点の集合を球と呼ぶ．

定理 17 球の切断面 (P.35)
球 (面) を平面で切断してできる図形は，円である．



球の体積

定理 17 球の切断面
球 (面) を平面で切断してできる図形は，円である．

(証明) 切断面が球の中心を通るかどうかで場合分けする．

(i) 切断面が球の中心を含む場合，切断してできる図形はすべて球上の点より，どの点も球の中心からの距離が等しい．すなわち，図形は球の中心を中心とする円となる．

(ii) 切断面が球の中心を含まない場合，球の中心を O，半径を r とおく．また，球の中心から切断面に下ろした垂線の足を H とおき，$\mathrm{OH} = h$ であるとする．いま切断してできる図形上の点を A とおくと，$\triangle$OHA は直角三角形となるので

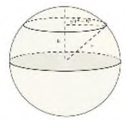
$$\mathrm{HA}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}^2 = r^2 - h^2$$

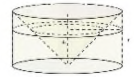
となる．すなわち，AH の長さは A の位置によらず一定となるので，A は点 H を中心とする円上にある．

以上 (i)，(ii) より，球の切断面にできる図形はいずれも円となる．

球の体積

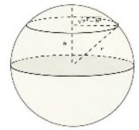
定理 18 球の体積 (P.36)
半径 r の半球の体積は，底面が半径 r の円で，高さが r である円柱の体積から，底面が半径 r の円で高さが r である円錐の体積を引いたものに等しい．すなわち，半球の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$，球の体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ である．





球の体積

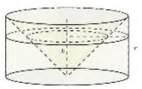
(証明)
半球と，円柱から円錐を除いた立体の断面積が等しいことを示し，カヴァリエリの原理を用いて同体積であることを示す．
いま，半球の中心から h だけ離れた部分の断面積を考える．断面は円となり，半径は $\sqrt{r^2 - h^2}$ となるから，断面積は
$\pi(r^2 - h^2)$ ……①



球の体積

一方，円柱の底面から h だけ離れた切断面の断面積は，底面積と同じく πr^2 で，円錐の底面から h だけ離れた切断面は円となり，その半径は $r \cdot \frac{h}{r} = h$ となるので，断面積は πh^2．よって，円柱から円錐を取り去った図形の底面から h だけ離れた断面の断面積は

$$\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2) \quad \cdots\cdots ②$$



球の体積

以上①，② より，h の値に関わらず断面積が等しいので，カヴァリエリの原理より 2 つの立体の体積は等しい．すなわち，半球の体積は

$$\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

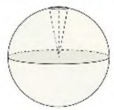
となり，球の体積は

$$2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

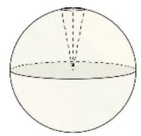
となる．　　(Q.E.D.)

球の表面積

定理 19 球の表面積
半径 r の球の表面積を S とすると，$S = 4\pi r^2$ である．



球の表面積



(考え方)
球を，多数の円錐に分割して考える．半径 r の球が，底面積が S' で高さが球の半径 r である n 個の円錐に分割できるとする．すると，球と円錐の体積の関係より

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n \cdot \frac{1}{3}S'r$$
$$4\pi r^2 = S'n$$

となる．ここで，$S'n$ は円錐の底面積の和であるが，これは球面の表面積と一致するので，
$S = S'n = 4\pi r^2$

中 3 幾何 (数学 2)

11/15 第 17 回 §12 体積と切断面 (P.38〜P.41)

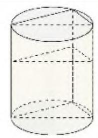
赤間 祐也

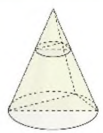
akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

円柱・円錐の体積

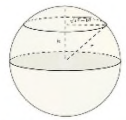
定理 16 円柱・円錐の体積
(i) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 円柱の体積は，Sh．
(ii) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 円錐の体積は，$\frac{1}{3}Sh$．

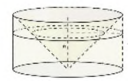




球の体積

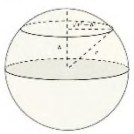
定理 18 球の体積 (P.36)
半径 r の半球の体積は，底面が半径 r の円で，高さが r である円柱の体積から，底面が半径 r の円で高さが r である円錐の体積を引いたものに等しい．すなわち，半球の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$，球の体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ である．





球の体積

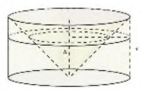
(証明)
半球と，円柱から円錐を除いた立体の断面積が等しいことを示し，カヴァリエリの原理を用いて同体積であることを示す．
いま，半球の中心から h だけ離れた部分の断面積を考える．断面は円となり，半径は $\sqrt{r^2 - h^2}$ となるから，断面積は
$\pi(r^2 - h^2)$ ……①



球の体積

一方，円柱の底面から h だけ離れた切断面の断面積は，底面積と同じく πr^2 で，円錐の底面から h だけ離れた切断面は円となり，その半径は $r \cdot \frac{h}{r} = h$ となるので，断面積は πh^2．よって，円柱から円錐を取り去った図形の底面から h だけ離れた断面の断面積は

$$\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2) \quad \cdots\cdots ②$$



球の体積

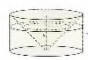
以上①，② より，h の値に関わらず断面積が等しいので，カヴァリエリの原理より 2 つの立体の体積は等しい．すなわち，半球の体積は

$$\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

となり，球の体積は

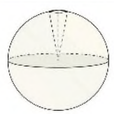
$$2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

となる．　　(Q.E.D.)

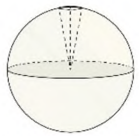


球の表面積

定理 19 球の表面積
半径 r の球の表面積を S とすると，$S = 4\pi r^2$ である．



球の表面積



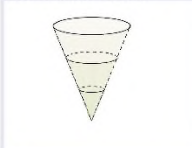
(考え方)
球を，多数の円錐に分割して考える．半径 r の球が，底面積が S' で高さが球の半径 r である n 個の円錐に分割できるとする．すると，球と円錐の体積の関係より

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\cdot\frac{1}{3}S'r$$
$$4\pi r^2 = S'n$$

となる．ここで，$S'n$ は円錐の底面積の和であるが，これは球面の表面積と一致するので，
$S = S'n = 4\pi r^2$

前回のワークシートの内容

問題 1
図のような直円錐の容器に深さ 5cm まで水が入っている．水面をさらに 5cm 高くするのに 140cm^3 の水を要した．このとき，最初にあった水の体積を求めよ．（中央大附高）

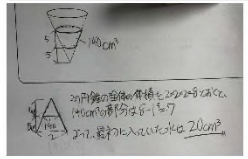


前回のワークシートの内容

問題 1
図のような直円錐の容器に深さ 5cm まで水が入っている．水面をさらに 5cm 高くするのに 140cm^3 の水を要した．このとき，最初にあった水の体積を求めよ．（中央大附高）

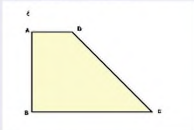
前回のワークシートの内容

問題 1
図のような直円錐の容器に深さ 5cm まで水が入っている．水面をさらに 5cm 高くするのに 140cm^3 の水を要した．このとき，最初にあった水の体積を求めよ．（中央大附高）



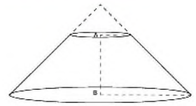
前回のワークシートの内容

問題 2
下図の台形 ABCD は AD = 2，AB = 4，BC = 6，$\angle DAB = \angle ABC = \angle R$ である．これを直線 ℓ を軸として 1 回転でできる立体について
(1) 立体の体積を求めよ．
(2) 立体の表面積を求めよ．（平安高）



前回のワークシートの内容

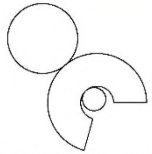
前回のワークシートの内容



(1) 底面が半径 6 の円で，高さ 6 の円錐から，底面が半径 2 の円で，高さが 2 の円錐を除いた立体である．よって体積は

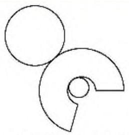
$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 2^2\pi\cdot 2 = \underline{\frac{208}{3}\pi\ (Ans.)}$$

前回のワークシートの内容



(2) 立体の展開図を考える．立体の上底，下底はそれぞれ半径が 2，6 の円．一方側面は，扇形から扇形を取り除いた形となる．大きい方の扇形の半径は $6\sqrt{2}$，小さい方の扇形の半径は $2\sqrt{2}$．扇形の弧の長さと円周の長さが一致するので，円周の弧の長さは 12π．

前回のワークシートの内容

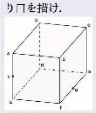


(2) 一方，扇形をつくる円の円周は，$12\sqrt{2}\pi$．よって扇形は円の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の領域を占めるとわかる．以上より，求める表面積は

$$6^2\cdot\pi + 2^2\cdot\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(6\sqrt{2}\right)^2\pi - \left(2\sqrt{2}\right)^2\pi\right\} = 40\pi + \frac{72\pi - 8\pi}{\sqrt{2}}$$
$$= \underline{\mathbf{40\pi + 32\sqrt{2}\pi}\ (A}$$

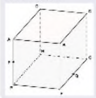
体積と切断面

例題 4(P.38)
下図の立方体 ABCD-EFGH において，AE の中点 P，FG の中点 Q とするとき，立方体を 3 点 D, P, Q を通る平面で切ったときの切り口を描け．



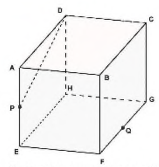
体積と切断面

例題 4(P.38)
下図の立方体 ABCD-EFGH において，AE の中点 P，FG の中点 Q とするとき，立方体を 3 点 D, P, Q を通る平面で切ったときの切り口を描け．



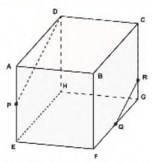
(考え方)
- 同じ面に通る点が 2 点ある場合，2 点を線分で結ぶ
- 相対する 2 面は平行なので，切り口も平行
- 延長して切断面を考えてもよい

例題 4(P.38)



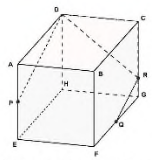
① P, D は同一平面上なので線分 DP は切り口となる．

例題 4(P.38)



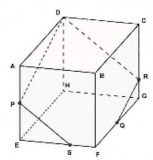
② 平面 ADHG と平面 BCGH は平行より，平面 DPQ との交線は平行となる．よって Q を通り PD と平行な直線は切り口となる．
　この直線と CG の交点を R とすると，R は CG を 3 : 1 に内分する．

例題 4(P.38)



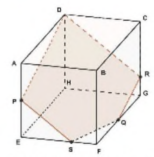
③ R, D は同一平面上より，線分 RD は切り口となる．

例題 4(P.38)



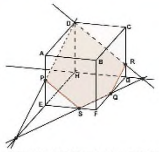
④ 平面 CDHG と BAEF は平行より，平面 DPQ との交線は平行となる．よって P を通り RD と平行な直線は切り口となる．
　この直線と直線 EF の交点を S とすると，S は E と F のあいだにある．

例題 4(P.38)



⑤ S, Q は同一平面上より，線分 SQ は切り口となる．
　切り口の辺がすべてあらわれたのでこれで完成．よって切り口は五角形 DPSQR である．

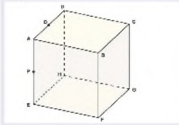
例題 4(P.38)



直線 DP, DR と平面 EFGH の交点をとり，2 点を結ぶと直線 QS と一致する．
　また，立方体の 1 辺の長さが与えられれば，ピタゴラスの定理を用いて各辺の長さも求められる．

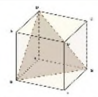
例題 5(P.40)

例題 5(P.40)
立方体 ABCD-EFGH を，以下のような平面で切ったときの切り口をかき入れ，その図形の名称を答えよ．すべて終わったら断面にできる図形の面積を求めよ．ただし，立方体の 1 辺の長さを 6 とする．



例題 5(P.40)

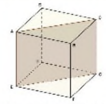
例題 5(P.40)
(1) 3 点 D, E, G を通る平面



3 点 D, E, G を通る正三角形 DEG が断面となる．
各辺の長さは $DE = EG = GD = 6\sqrt{2}$
面積は $\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \underline{\mathbf{18\sqrt{3}}\ (Ans.)}$

例題 5(P.40)

例題 5(P.40)
(2) 3 点 A, C, E を通る平面



4 点 A, E, G, C を通る長方形が断面となる．
各辺の長さは $AE = CG = 6$
$AC = EG = 6\sqrt{2}$
面積は $6\cdot 6\sqrt{2} = \underline{\mathbf{36\sqrt{2}}\ (Ans.)}$

例題 5(P.40)

例題 5(P.40)
(3) AE の中点 P, AD の中点 Q とするとき，3 点 P, Q, B を通る平面

3 点 P, Q, B を通る二等辺三角形が断面となる．
各辺の長さは $PQ = 3\sqrt{2}$, $BQ = BP = 3\sqrt{5}$
三角形の高さ $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ となるので面積は
$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{2} = \underline{\frac{27}{2}\ (Ans.)}$

中 3 幾何 (数学 2)
11/21 第 18 回 §13 多面角 (P.42～P.45)

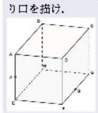
赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

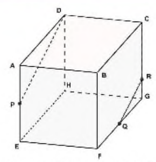
体積と切断面

例題 4(P.38)
下図の立方体 ABCD-EFGH において，AE の中点 P, FG の中点 Q とするとき，立方体を 3 点 D, P, Q を通る平面で切ったときの切り口を描け．



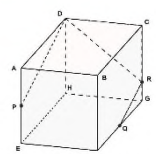
(考え方)
- 同じ面に通る点が 2 点ある場合，2 点を線分で結ぶ
- 相対する 2 面は平行なので，切り口も平行
- 延長して切断面を考えてもよい

例題 4(P.38)



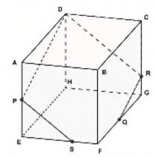
② 平面 ADHG と平面 BCGH は平行より，平面 DPQ との交線は平行となる．よって Q を通り PD と平行な直線は切り口となる．
　この直線と CG の交点を R とすると，R は CG を 3 : 1 に内分する．

例題 4(P.38)



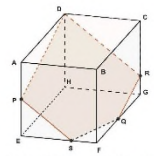
③ R, D は同一平面上より，線分 RD は切り口となる．

例題 4(P.38)



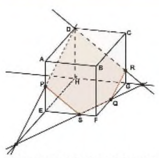
④ 平面 CDHG と BAEF は平行より，平面 DPQ との交線は平行となる．よって P を通り RD と平行な直線は切り口となる．
　この直線と直線 EF の交点を S とすると，S は E と F のあいだにある．

例題 4(P.38)



⑤ S, Q は同一平面上より，線分 SQ は切り口となる．
　切り口の辺がすべてあらわれたのでこれで完成．よって切り口は五角形 DPSQR である．

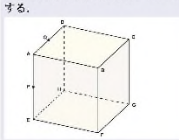
例題 4(P.38)



直線 DP, DR と平面 EFGH の交点をとり，2 点を結ぶと直線 QS と一致する．
　また，立方体の 1 辺の長さが与えられれば，ピタゴラスの定理を用いて各辺の長さも求められる．

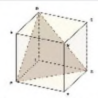
問題 1

問題 1
立方体 ABCD-EFGH を，以下のような平面で切ったときの切り口をかき入れ，その図形の名称を答えよ．すべて終わったら断面にできる図形の面積を求めよ．ただし，立方体の 1 辺の長さを 6 とする．



問題 1

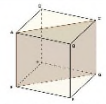
問題 1
(1) 3 点 D, E, G を通る平面



3 点 D, E, G を通る正三角形 DEG が断面となる．
各辺の長さは $DE = EG = GD = 6\sqrt{2}$
面積は $\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \underline{\mathbf{18\sqrt{3}}\ (Ans.)}$

問題 1

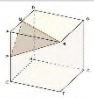
問題 1
(2) 3 点 A, C, E を通る平面



4 点 A, E, G, C を通る長方形が断面となる．
各辺の長さは $AE = CG = 6$
$AC = EG = 6\sqrt{2}$
面積は $6\cdot 6\sqrt{2} = \underline{\mathbf{36\sqrt{2}}\ (Ans.)}$

問題 1

問題 1
(3) AE の中点 P, AD の中点 Q とするとき，3 点 P, Q, B を通る平面

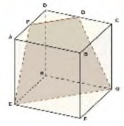


3 点 P, Q, B を通る二等辺三角形が断面となる．
各辺の長さは $PQ = 3\sqrt{2}$, $BQ = BP = 3\sqrt{5}$
三角形の高さ $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ となるので面積は

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{2} = \frac{27}{2}$ (*Ans.*)

問題 1

問題 1
(4) AD の中点 P とするとき，3 点 P, E, G を通る平面

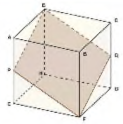


CD の中点 Q とすると，4 点 P, Q, G, E を通る等脚台形 PQGE が断面となる．各辺の長さは $EG = 6\sqrt{2}$, $PQ = 3\sqrt{2}$, $PE = QG = 3\sqrt{5}$
台形の高さは $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ となるので面積は

$\frac{1}{2}\cdot 9\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{81}{2}$ (*Ans.*)

問題 1

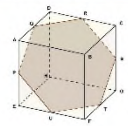
問題 1
(5) AE の中点 P とするとき，3 点 D, F, P を通る平面



CG の中点 Q とすると，4 点 D, P, F, Q を通る菱形 DPFQ が断面となる．
各辺の長さは
$DP = PF = FQ = QD = 3\sqrt{5}$
対角線 $PQ = 6\sqrt{2}$, $DF = 6\sqrt{3}$ となるので面積は
$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{3} = \mathbf{18\sqrt{6}}$ (*Ans.*)

問題 1

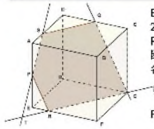
問題 1
(7)AE の中点 P, AD の中点 Q, CD の中点 R とするとき，3 点 P, Q, R を通る平面



GC の中点 S, FG の中点 T, EF の中点 U とすると，6 点 P,U,T,S,R,Q を通る正六角形 PUTSRQ が断面となる．
各辺の長さは全て $3\sqrt{2}$
面積は
$6\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} = \mathbf{27\sqrt{3}}$ (*Ans.*)

問題 1

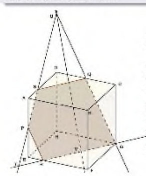
問題 1
(6)AE の中点 P, CD の中点 Q とするとき，
3 点 P, Q, G を通る平面



EF を 1 : 3 に内分する点 R, DA を 2 : 1 に内分する点 S とすると，5 点 P,R,G,Q,S を通る五角形 PRGQS が断面となる．
各辺の長さは内分比とピタゴラスより $QG = 3\sqrt{5}$, $PR = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,
$RG = \frac{15}{2}$, $QS = 5$, $SP = \sqrt{13}$

問題 1

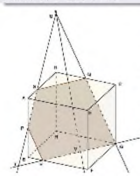
問題 1
(6)AE の中点 P, CD の中点 Q とするとき，
3 点 P, Q, G を通る平面



一方 HT と GR の交点 T, ST と QG の交点 U とすると $HT = 8$, $HU = 12$ より $UT = 4\sqrt{13}$,
$UG = 6\sqrt{5}$, $GT = 10$. よって $\triangle UGT$ の 3 辺の長さがわかったので面積を考えることとする．いま U から GT に下ろした垂線の足を V とおき，$VG = x$ とおくと $\triangle UVG$, $\triangle UVT$ においてピタゴラスの定理より

問題 1

問題 1
(6)AE の中点 P, CD の中点 Q とするとき，
3 点 P, Q, G を通る平面



$36\cdot 5 - x^2 \;=\; 16\cdot 13 - (10 - x)^2$

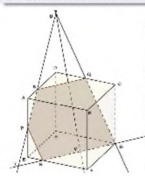
これをとくと $x = \frac{18}{5}$．よって

$UH = \sqrt{36\cdot 5 - \frac{18^2}{25}} = \frac{12\sqrt{29}}{5}$．
このことから $\triangle UTG$ の面積は

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{12}{5}\sqrt{29} = 12\sqrt{29}$

問題 1

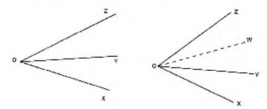
問題 1
(6)AE の中点 P, CD の中点 Q とするとき，
3 点 P, Q, G を通る平面



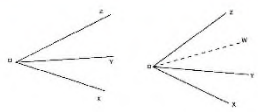
ここで $\triangle UTG \backsim \triangle USQ \backsim \triangle PTR$
であり，$\triangle UTG : \triangle USQ = TG^2 : SQ^2$
，
$\triangle UTG : \triangle PTR = UG^2 : PR^2$
よって
$\triangle UTG : \triangle USQ : \triangle PTR = 16 : 4 : 1$
以上より求める部分の面積は
$\frac{16-4-1}{16}\triangle UTG =$
$\frac{33}{4}\sqrt{29}$ (*Ans.*)

多面角

3 つの面が交わってできる，1 つの頂点と 3 つの面を持つ立体を 3 面角，1 つの頂点と 4 つの面を持つ立体を 4 面角，$\cdots$，1 つの頂点と n 個の面を持つ立体を n 面角と呼ぶ．例えば，下図の左側の角 $\angle$O-XYZ は 3 面角，右側の角 $\angle$O-XYZW は 4 面角である．



多面角

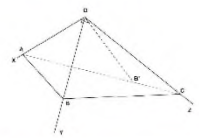


厳密に述べると，3 面角は 1 点で交わる 3 つの面の 2 つずつの 2 面角の共通部分として定義される．多面角も同様である．
また，多面角を構成する 2 面角のつくる角を「面角」と呼ぶ．(これは多面角を構成する 2 面角の平面角とは異なる．)

定理 20(P.42)

定理 20(P.42)
3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 $\angle$O-XYZ において

$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$



定理 20(P.42) の直観的な説明

定理 20(P.42)
3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 $\angle$O-XYZ において

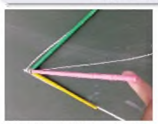
$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$

OX, OY, OZ が同一平面上にあるとき，$\angle XOZ = \angle XOY + \angle YOZ$

定理 20(P.42) の直観的な説明

定理 20(P.42)
3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 $\angle$O-XYZ において

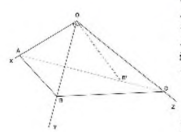
$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$



OY を持ち上げると，あいだの面角 $\angle XOY$, $\angle YOZ$ が大きくなるので $\angle XOY + \angle YOX > \angle ZOX$

定理 20(P.42) の証明

$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$



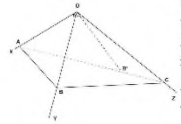
$\angle XOY \geq \angle ZOX$ のとき，定理の成立は明らか．よって
$\angle XOY < \angle ZOX$ の場合の成立を示す．
$\angle XOY < \angle ZOX$ のとき，半直線 OX, OZ 上に任意に点 A, C を取り，AC 上に点 B' を

$\angle AOB' = \angle XOY$

となるようにとる．すると条件より，B' は A と C のあいだにある．

定理 20(P.42) の証明

$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$



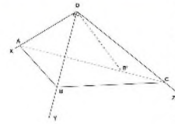
一方，半直線 OY 上に点 B を
$OB = OB'$ となるようにとる．
すると，$\triangle AOB \equiv$
$\triangle AOB'$ ($\because$ 二辺夾角相等)
よって $AB = AB' \cdots\cdots$①
一方，$\triangle ABC$ において，三角形の成立条件より

$AB + BC \;>\; AC$
$AB + BC \;>\; AB' + B'C \cdots\cdots$②

よって ①を代入すると
$BC > B'C$

定理 20(P.42) の証明

$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$



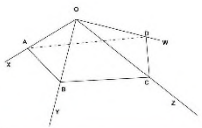
いま $\triangle BOC$ と $\triangle B'OC$ は
$OB = OB'$，OC を共有し，
$BC > B'C$ であるので，
$\angle BOC > \angle B'OC$
($\because$ 中学の幾何 P. 57 定理 23 系)．すなわち，
$\angle XOY + \angle YOZ >$
$\angle AOB' + \angle B'OC = \angle ZOX$
となるので，題意は示された．
(Q.E.D.)

定理 21(P.44)

定理 21(P.44)

凸 4 面角の面角の和は 4∠R より小さい．すなわち，凸 4 面角 O-XYZW について

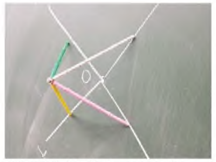
$$\angle XOY + \angle YOZ + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$



定理 21(P.44) の直観的な説明

OX, OY, OZ, OW がすべて同一平面上にあるときは
$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX = 4\angle R$

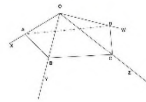
定理 21(P.44) の直観的な説明



頂点 O を持ち上げると，4 つの面角
∠XOY, ∠YOZ, ∠ZOW, ∠WOX のいずれも「すぼまる」ことで小さくなる．すなわち $\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$

定理 21(P.44) の証明

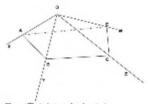
$$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$



凸 4 面角 O-XYZW をなす半直線 OX, OY, OZ, OW 上に，同一平面上にあるように 4 点 A, B, C, D をとる．すると，四角錐 O-ABCD ができ，底面に注目すると 3 面角 A-DBO, B-ACO, C-BDO, D-CAO と 4 つの 3 面角ができている．これらの 3 面角に，定理 17 を用いると

定理 21(P.44) の証明

$$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$

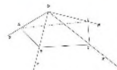


$\angle OAD + \angle OAB > \angle DAB \cdots ①$
$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC \cdots ②$
$\angle OCB + \angle OCD > \angle BCD \cdots ③$
$\angle ODC + \angle ODA > \angle CDA \cdots ④$

①～④を辺々加えると
$\angle OAD + \angle OAB + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB + \angle OCD + \angle ODC + \angle ODA$
$> \angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA$

定理 21(P.44) の証明

$$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$



右辺は，底面である四角形 ABCD の内角の和であるので
$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4\angle R \cdots\cdots ⑤$

一方，4 面角の側面の三角形 △OAB, △OBC, △OCD, △ODA について内角の和を考えると

$\angle OAB + \angle OBA = 2\angle R - \angle AOB \cdots\cdots ⑥$
$\angle OBC + \angle OCB = 2\angle R - \angle BOC \cdots\cdots ⑦$
$\angle OCD + \angle ODC = 2\angle R - \angle COD \cdots\cdots ⑧$
$\angle ODA + \angle OAD = 2\angle R - \angle DOA \cdots\cdots ⑨$

定理 21(P.44) の証明

$$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$

以上の⑤～⑨を先ほどの式に代入すると

$2\angle R - \angle AOB + 2\angle R - \angle BOC + 2\angle R - \angle COD + 2\angle R - \angle DOA$
$> 4\angle R$

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA < 8\angle R - 4\angle R$
$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA < 4\angle R$

が導かれる．すなわち

$$\angle XOY + \angle YOZ + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$

とできるので，題意は示された． (Q.E.D.)

中 3 幾何 (数学 2)

11/28 第 19 回 §14～15 多面体 (P.46～P.47)

赤間 祐也

akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

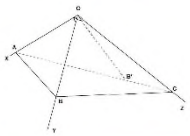
1. 前回の復習
   - 多面角
   - 前回のワークシートの内容
2. 本日の内容
   - 多面体

定理 20(P.42)

定理 20(P.42)

3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 ∠O-XYZ において

$$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$$



定理 20(P.42) の直観的な説明

定理 20(P.42)

3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 ∠O-XYZ において

$$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$$

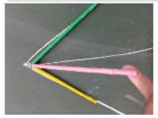
OX, OY, OZ が同一平面上にあるとき，$\angle XOZ = \angle XOY + \angle YOZ$

定理 20(P.42) の直観的な説明

定理 20(P.42)

3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 ∠O-XYZ において

$$\angle XOY + \angle YOZ > \angle ZOX$$



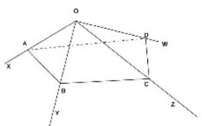
OY を持ち上げると，あいだの面角 ∠XOY, ∠YOZ が大きくなるので $\angle XOY + \angle YOX > \angle ZOX$

定理 21(P.44)

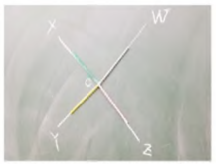
定理 21(P.44)

凸 4 面角の面角の和は 4∠R より小さい．すなわち，凸 4 面角 O-XYZW について

$$\angle XOY + \angle YOZ + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$$



定理 21(P.44) の直観的な説明



OX, OY, OZ, OW がすべて同一平面上にあるときは
$\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX = 4\angle R$

定理 21(P.44) の直観的な説明

頂点 O を持ち上げると，4 つの面角
∠XOY, ∠YOZ, ∠ZOW, ∠WOX のいずれも「すぼまる」ことで小さくなる．すなわち $\angle XOY + \angle YOX + \angle ZOW + \angle WOX < 4\angle R$

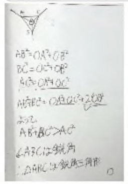
問題 1

問題 1

すべての面角が直角である 3 面角を直 3 面角と呼ぶ．直 3 面角を平面で切った切断面にできる三角形は鋭角三角形であることを示せ．
(このことから，立方体や直方体の切断面にできる三角形は鋭角三角形に限ることがいえる．)

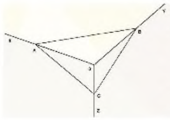
問題 1

すべての面角が直角である 3 面角を直 3 面角と呼ぶ．直 3 面角を平面で切った切断面にできる三角形は鋭角三角形であることを示せ．



問題 1

すべての面角が直角である 3 面角を直 3 面角と呼ぶ．直 3 面角を平面で切った切断面にできる三角形は鋭角三角形であることを示せ．



3 面角 O-XYZ を $\angle XOY = \angle YOZ = \angle ZOX = \angle R$ となるようにとり，半直線 OX, OY, OZ 上に点 A, B, C をとる．すると $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ は直角三角形であるからピタゴラスの定理より

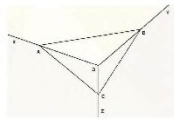
$OA^2 + OB^2 = AB^2$ ……①

$OB^2 + OC^2 = BC^2$ ……②

$OC^2 + OA^2 = CA^2$ ……③

が成り立つ．

問題 1



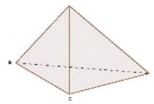
すると $\triangle ABC$ において

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 \\ = \ & OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 \\ & (\because ①, ②) \\ = \ & CA^2 + 2OB^2 \ (\because ③) \\ > \ & CA^2 \end{aligned}$$

となるので，AC の対辺である $\angle B$ は鋭角．同様にすると $\angle A, \angle C$ も鋭角といえる．よって $\triangle ABC$ は鋭角三角形である．　(*q.e.d.*)

問題 2

問題 2
すべての辺が同一平面上にない多角形をゴーシュ多角形と呼ぶ．ゴーシュ4 角形の 4 つの角の和は $4\angle R$ より小さいことを示せ．



問題 2

問題 2
すべての辺が同一平面上にない多角形をゴーシュ多角形と呼ぶ．ゴーシュ4 角形の 4 つの角の和は $4\angle R$ より小さいことを示せ．

$\triangle ABC, \triangle ADC$ において内角の和より

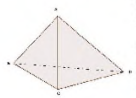
$$\begin{cases} \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2\angle R \\ \angle DAC + \angle ADC + \angle ACD = 2\angle R \end{cases}$$

よって

$\angle ABC + (\angle BAC + \angle DAC) + \angle ADC + (\angle DCA + \angle ACB) = 4\angle R$ ……① となる．

問題 2

問題 2
すべての辺が同一平面上にない多角形をゴーシュ多角形と呼ぶ．ゴーシュ4 角形の 4 つの角の和は $4\angle R$ より小さいことを示せ．



一方で四面体 ABCD を考えると，3 面角 A-BCD のまわりで定理 17 を用いると

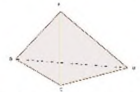
$\angle BAD < \angle BAC + \angle DAC$ ……②

同様に 3 面角 C-BAD のまわりで定理 17 を用いると

$\angle BCD < \angle BCA + \angle DCA$ ……③

問題 2

問題 2
すべての辺が同一平面上にない多角形をゴーシュ多角形と呼ぶ．ゴーシュ4 角形の 4 つの角の和は $4\angle R$ より小さいことを示せ．



① 式に②，③を代入すると

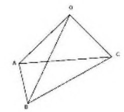
$$\angle ABC + \angle BAD + \angle ADC + \angle BCD < 4\angle R$$

これは示すべき式である．　(Q.E.D.)

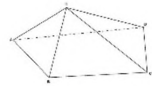
多面体 (P.46)

いくつかの面で包まれた閉じた空間図形を立体とよび，立体の中でもそれを包む面がすべて平面であるものを特に多面体と呼ぶ．多面体のうち，面の数が n 個であるものを n 面体と呼ぶ．すると，例えば三角錐は四面体，四角錐は五面体である．

①



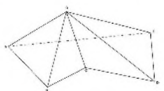
②



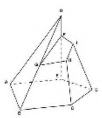
多面体 (P.46)

多面体の頂点のつくる多面角に注目した際に，すべての多面角が凸多面角でできている多面体を凸多面体と呼ぶ．一方で，多面角に凹多面角を含む多面体を凹多面体と呼ぶ．

③



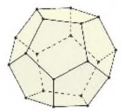
④



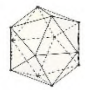
多面体 (P.46)

複雑な多面体を考えることもできる．

⑤



⑥



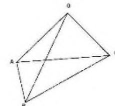
多面体 (P.46)

多面体は基本図形として，点である頂点 (vertex)，線分である辺，ないしは稜 (edge)，および面 (face) の 3 つを持つ．頂点の数を V，稜の数を E，面の数を F で表すことにすると，V, E, F のあいだにはある関係式が成り立つことが知られている．

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

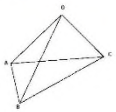
① 四面体



多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

① 四面体

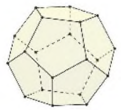


$V = 4, E = 6, F = 4$

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

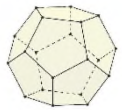
⑤ 正十二面体



多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体



$V = 20, E = 30, F = 12$

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

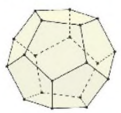
⑤ 正十二面体

(考え方)
頑張って数えてもよいが…
正十二面体の対称性に注目して計算すると楽か．
正十二面体は正 5 角形 12 面からできている立体．全部バラバラにして考えると
正 5 角形 1 面につき頂点 5 つ，辺 5 本あるので，いずれも合計 $5 \times 12 = 60$ だけある．

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体

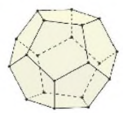


(考え方)
一方で，1 つの頂点のまわりに注目すると，1 頂点につき正 5 角形が 3 面集まっているので，バラバラにすると 3 回重複してカウントしていることになる．
よって頂点の数は
$V = \frac{60}{3} = 20$

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体



(考え方)
同様に，1 つの辺のまわりに注目すると，1 辺につき正 5 角形が 2 面集まっているので，バラバラにすると 2 回重複してカウントしていることになる．
よって辺の数は
$E = \frac{60}{2} = 30$

多面体 (P.46)

以上を表にすると

	V	E	F
①	4	6	4
⑤	20	30	12

多面体 (P.46)

以上を表にすると

	V	E	F	$V-E+F$
①	4	6	4	
⑤	20	30	12	

多面体 (P.46)

以上を表にすると

	V	E	F	$V-E+F$
①	4	6	4	2
⑤	20	30	12	2

多面体定理 (P.48)

多面体について，以下のことが知られている．

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

中 3 幾何 (数学 2)
11/29 第 20 回 §17 正多面体 (P.54～P.47)

赤間 祐也

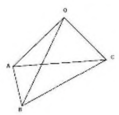
akama.yuya@musashi.ed.jp
武蔵高等学校中学校 数学科

目次

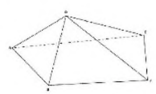
多面体 (P.46)

いくつかの面で包まれた閉じた空間図形を立体とよび，立体の中でもそれを包む面がすべて平面であるものを特に多面体と呼ぶ．多面体のうち，面の数が n 個であるものを n 面体と呼ぶ．すると，例えば三角錐は四面体，四角錐は五面体である．

①



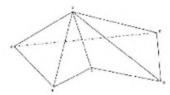
②



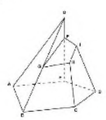
多面体 (P.46)

多面体の頂点のつくる多面角に注目した際に，すべての多面角が凸多面角でできている多面体を凸多面体と呼ぶ．一方で，多面角に凹多面角を含む多面体を凹多面体と呼ぶ．

③



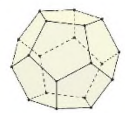
④



多面体 (P.46)

複雑な多面体を考えることもできる．

⑤



⑥

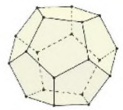
多面体 (P.46)

多面体は基本図形として，点である頂点 (vertex)，線分である辺，ないしは稜 (edge)，および面 (face) の 3 つを持つ．頂点の数を V，稜の数を E， 面の数を F で表すことにすると，V, E, F のあいだにはある関係式が成り立つことが知られている．

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体

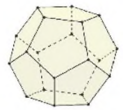


$V = 20, E = 30, F = 12$

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体

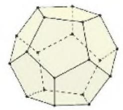


(考え方)
頑張って数えてもよいが…
正十二面体の対称性に注目して計算すると楽か．
正十二面体は正 5 角形 12 面からできている立体．全部バラバラにして考えると
正 5 角形 1 面につき頂点 5 つ，辺 5 本あるので，いずれも合計 $5 \times 12 = 60$ だけある．

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体



(考え方)
一方で，1 つの頂点のまわりに注目すると，1 頂点につき正 5 角形が 3 面集まっているので，バラバラにすると 3 回重複してカウントしていることになる．
よって頂点の数は
$V = \frac{60}{3} = 20$

多面体 (P.46)

例
以下の立体について，V, E, F の数を求めよ．

⑤ 正十二面体

(考え方)
同様に，1 つの辺のまわりに注目すると，1 辺につき正 5 角形が 2 面集まっているので，バラバラにすると 2 回重複してカウントしていることになる．
よって辺の数は
$E = \frac{60}{2} = 30$

多面体定理 (P.48)

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

多面体定理 (P.48)

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

※ 一般的な説明は P. 48～ P.53 を参照．考え方としては
ある多面体から 頂点を 1 つ取り除いて面を貼る操作を行うとき，

- 頂点を取り去っても立体である場合は $V - E + F$ の値（「オイラー標数」と呼ぶ）は変わらない
- 頂点を取り去った結果立体でなくなる場合，$V - E + F$ の値は 1 つ減少する
- 空間内の多角形について，$V = E$ より $V - E + F = 1$

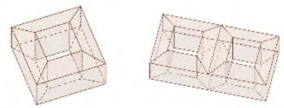
多面体定理 (P.48)

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

(反例) 「穴の開いている多面体」については $V - E + F$ は 2 とならない．



多面体定理 (P.48)

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

(反例) 「穴の開いている多面体」については $V - E + F$ は 2 とならない．

$$\begin{aligned} V &= 16 \\ E &= 32 \\ F &= 16 \\ V - E + F &= 0 \end{aligned}$$

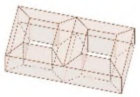
多面体定理 (P.48)

定理 22 オイラーの多面体定理 (P.48)
多面体の頂点数を V，稜数を E，面数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成立する．

(反例) 「穴の開いている多面体」については $V - E + F$ は 2 とならない．

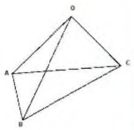


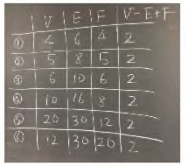
$$\begin{aligned} V &= 28 \\ E &= 58 \\ F &= 28 \\ V - E + F &= -2 \end{aligned}$$

問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

①



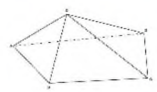


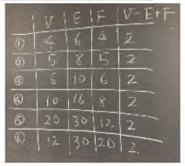
	V	E	F	V−E+F
①	4	6	4	2
②	5	8	5	2
③	6	10	6	2
④	10	16	8	2
⑤	20	30	12	2
⑥	12	30	20	2

問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

②

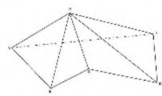


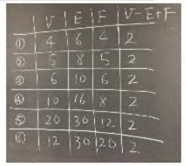


問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

③

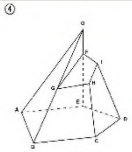


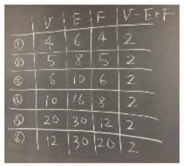


問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

④

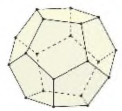


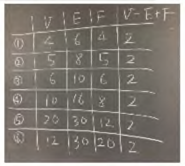


問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

⑤

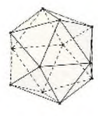


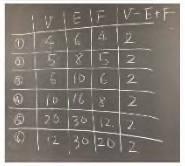


問題 1

問題 1
図について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．

⑥

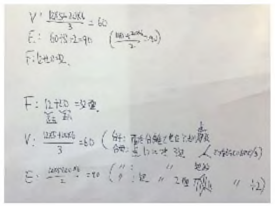




問題 2

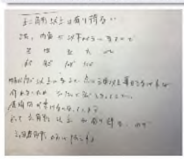
問題 2
いわゆる「サッカーボール型」と言われる「角切り二十面体」なる立体はどの頂点についても 1 つの頂点のまわりに正五角形が 1 面と正六角形が 2 面があつまってできており，全部で正五角形が 12 面と正六角形が 20 面からできているという．
　このとき，この立体の頂点数 V，辺数 E，および面数 F を求めよ．

問題 2



問題 3

問題 3
正多面体を構成する面が正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限ることを証明せよ．ただし，正多面体はいずれの面も正多角形でできており，かつどの頂点の周りにも同じ正多角形が同じ数だけ集まっている対称性を持っているものとする．



問題 3

問題 3
正多面体を構成する面が正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限ることを証明せよ．ただし，正多面体はいずれの面も正多角形でできており，かつどの頂点の周りにも同じ正多角形が同じ数だけ集まっている対称性を持っているものとする．

(証明)　正多面体の頂点は少なくとも 3 面角以上である．仮に正六角形以上の多角形が正多面体の面となったとすると，1 つの内角の大きさは正六角形の内角 $\frac{8\angle R}{6} = \frac{4}{3}\angle R$ 以上となるので，3 面角の面角の和は $\frac{4}{3}\angle R \times 3 = 4\angle R$ 以上となる．しかしこれは定理 21 系に反するので矛盾．
　また，三角形，四角形，五角形の内角で考えた場合，3 面角の面角の和は $4\angle R$ を上回ることはない．
　よって，正多面体を構成する面は正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限ることがわかった．(Q.E.D.)

正多面体の定義

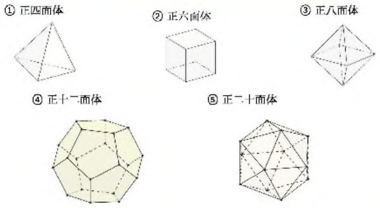
定義 9 正多面体 (P.54)
凸多面体のうち，以下の 3 つの条件を満たすものを正多面体 (あるいはプラトンの立体) と呼ぶ．

1° すべての辺の長さが同じである．
(すべての面は正多角形である．)

2° 各頂点の周りの構造 (多面角) がすべて合同である．
(どの頂点も周りの角がすべて等しい．)

3° 各面を構成する正多角形はすべて合同である．
(1 種類のみの正多角形の面から構成される．)

正多面体の例



正多面体でない例

1' のみを満たす例
アルキメデスの正角柱（側面が正方形である正多角柱）

アルキメデスの正三角柱

正多面体でない例

1' のみを満たす例
アルキメデスの正角柱（側面が正方形である正多角柱）

アルキメデスの正五角柱

正多面体でない例

1' のみを満たす例
アルキメデスの正反角柱
（アルキメデスの正角柱をねじって側面を正三角形としたもの）

アルキメデスの正反四角柱

正多面体でない例

1' のみを満たす例
アルキメデスの正反角柱
（アルキメデスの正角柱をねじって側面を正三角形としたもの）

アルキメデスの正反五角柱

正多面体でない例

1',3' を満たす例
デルタ多面体（すべての面が正三角形からなる凸多面体）

デルタ十面体（側面が正三角形の正五角錐２つ張り合わせ）

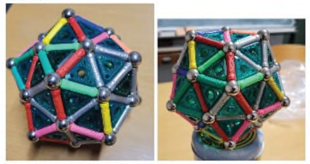
正多面体でない例

1',3' を満たす例
デルタ多面体（すべての面が正三角形からなる凸多面体）

デルタ十四面体 (正三角柱の側面に正四角錐)

正多面体でない例

1',3' を満たす例（凸でないもの）
ダヴィンチの星（正多面体に側面が正三角形の正角錐を張り付けたもの）



正十二面体のダヴィンチの星
(正十二面体の各面に正五角錐を張り付け)

正多面体でない例

1',3' を満たす例（凸でないもの）
ダヴィンチの星（正多面体に側面が正三角形の正角錐を張り付けたもの）

正二十面体のダヴィンチの星
(正二十面体の各面に正三角錐を張り付け)

正多面体でない例

1',2' を満たす例
半正多面体（各頂点に異なる種類の正多角形を集めたもの）

角切り二十面体（サッカーボール型）
(各頂点に正五角形１枚と正六角形２枚集める)

正多面体でない例

- 半正多面体
- デルタ多面体
- プラトンの正角柱

上にあるほど正多面体に近いとみなす．
(正多面体の本質はすべての面が同じ正多角形でできていることではなく，どの頂点のまわりにもおなじ構造がある対称性にあると考える．)

定理 24

定理 24(プラトンの定理)
正多面体は 正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の 5 種のみが存在し，他には存在しない．

補助定理 24-1(P.54)

補助定理 24-1
正多面体を構成する面は正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限る．

前回ワークシート問題 3 で証明済．

定義 シュレーフリ記号

定義 シュレーフリ記号
ある正多面体が 1 つの頂点につき正 p 角形が q 面集まってできているとき，この多面体を

$$\{p, q\}$$

と表すことにする．(これをシュレーフリ記号と呼ぶ．)

補助定理 24-2(P.55)

補助定理 24-2
正多面体として存在できるのは
$\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,3\}, \{5,3\}$ の 5 種のみである．

(証明)
正多面体をシュレーフリ記号を用いて $\{p, q\}$ と表現することにする．すると補助定理 24-1 より $p = 3, 4, 5$ のみ可能である．
それぞれの場合について，定理 21（多面角の面角の和は 4∠R 未満）を満たすように q の値を求める．

補助定理 24-2(P.55)

補助定理 24-2
正多面体として存在できるのは
$\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,3\}, \{5,3\}$ の 5 種のみである．

(i) $p = 3$ のとき，正 3 角形の 1 内角は 60° で，q 面集まったときに 360° 未満とならなければならないので

$$60^\circ \times q < 360^\circ$$
$$q < 6$$

いま $q \geqq 3$ であるから，$q = 3, 4, 5$

補助定理 24-2(P.55)

補助定理 24-2
正多面体として存在できるのは
$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ の 5 種のみである．

(ii) $p=4$ のとき，正方形の 1 内角は 90° で，q 面集まったときに 360° 未満とならなければならないので

$$\begin{aligned} 90^\circ \times q &< 360^\circ \\ q &< 4 \end{aligned}$$

いま $q \geqq 3$ であるから，$q=3$

補助定理 24-2(P.55)

補助定理 24-2
正多面体として存在できるのは
$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ の 5 種のみである．

(iii) $p=5$ のとき，正方形の 1 内角は 108° で，q 面集まったときに 360° 未満とならなければならないので

$$\begin{aligned} 108^\circ \times q &< 360^\circ \\ q &< \frac{10}{3} \end{aligned}$$

いま $q \geqq 3$ であるから，$q=3$

補助定理 24-2(P.55)

補助定理 24-2
正多面体として存在できるのは
$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ の 5 種のみである．

以上 (i)，(ii)，(iii) より，

$$(p,q)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$$

すなわち，正多面体として存在できるのは
$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ の 5 種のみである． (Q.E.D.)

定理 24

補助定理 2 より，正多面体として存在できるのは
$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ の 5 種のみであることがわかった．これらを具体化しよう．これらの頂点，辺，面の数を計算する．$\{p,q\}$ の正多角形が頂点，辺，面をそれぞれ V,E,F だけもつとする．
まず辺に着目すると，いま正 p 角形が F 枚ある．辺は 2 つの面で 1 本共有するので，重複を考えると

$$E=\frac{pF}{2} \cdots\cdots ①$$

次に面に注目すると，正 p 角形が F 枚あり，頂点は q 枚の面で 1 つを共有するので，重複を考えると

$$V=\frac{pF}{q} \cdots\cdots ②$$

一方，オイラーの多面体定理より

$$V-E+F=2 \cdots\cdots ③$$

定理 24

①，② を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{pF}{q}-\frac{pF}{2}+F &= 2 \\ 2pF-pqF+2qF &= 4q \\ (2p+2q-pq)F &= 4q \\ F &= \frac{4q}{2p+2q-pq} \end{aligned}$$

①,②に代入すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{p}{q}\cdot\frac{4q}{2p+2q-pq}=\frac{4p}{2p+2q-pq} \\ E &= \frac{p}{2}\cdot\frac{4q}{2p+2q-pq}=\frac{2pq}{2p+2q-pq} \end{aligned}$$

定理 24

すなわち，$\{p,q\}$ である多面体の頂点数 V，辺数 E，面数 F は

$$(V,E,F)=\left(\frac{4p}{2p+2q-pq},\frac{2pq}{2p+2q-pq},\frac{4q}{2p+2q-pq}\right)$$

で表される．これに補助定理 2 で求められたものを代入すると以下の表のようになる．

$\{p,q\}$	V	E	F
$\{3,3\}$	4	6	4
$\{3,4\}$	6	12	8
$\{3,5\}$	12	30	20
$\{4,3\}$	8	12	6
$\{5,3\}$	20	30	12

定理 24

以上より，面数が 4，8，20，6，12 の多面体のみが存在できるので，正多面体は正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種のみである． (Q.E.D.)

定理 24

以上より，面数が 4，8，20，6，12 の多面体のみが存在できるので，正多面体は正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種のみである． (Q.E.D.)

ここで証明したことは「正多面体が存在するとすると正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種のみである」ことであるので，本来は実際に存在することの証明が必要である．
ここでは実際に存在することを図で確認したことをもってその証明を省略している．