付録 A 作成教材「武蔵中学校の幾何」公理・定義・定理一覧

示すべき命題

△ABC に対して，ABC と同じ平面にない点 D を AD= BD=CD となるようにとる．いま D から平面 ABC に下ろした垂線の足を F とすると，F は △ABC の外心である．

空間の「公理」

空間内に「点」,「直線」,「平面」が存在し，以下のような条件を満たす．

公理 I　2 点を通る直線は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．(直線の存在性)

公理 II　平面上の 2 点を通る直線は，その平面に含まれる．（直線・平面の結合性）

公理 III　直線上にない 1 点を通り，かつこの直線に平行な直線は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．（直線の平行性）

公理 IV　一直線上にない 3 点を通る平面は必ず存在し，かつただ 1 つに限る．（平面の存在性）

公理 V　2 つの平面は 1 点だけを共有することはない．（平面の交叉性）

定理 1 平面の決定

以下の平面は必ず存在し，かつただ 1 つに決まる．

(0)　一直線上にない 3 点を含む平面（公理 IV）

(1)　1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面

(2)　相交わる 2 直線 ℓ, m とを含む平面

(3)　平行な 2 直線 ℓ, m を含む平面

定理 2

直線 ℓ と平面 α が交点を持つ場合，交点はただ 1 つに限る．（2 つ以上の交点を持たない．）

定理 3

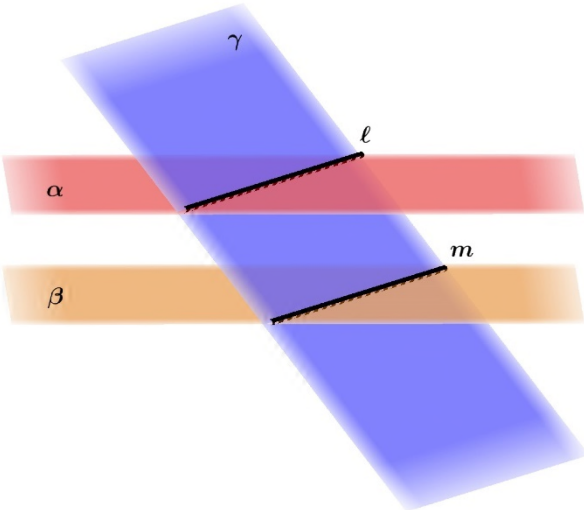
平面 α と平面 β が交わる場合，平面 α, β 両方の上にある直線が存在することを示せ．
（この直線を平面 α, β の「交線」と呼ぶ．）

定理 4

平行 2 平面を第 3 の平面できれば，切り口の 2 つの交線は平行である．すなわち 3 平面 α, β, γ について

$\alpha // \beta, \alpha \nparallel \gamma, \beta \nparallel \gamma \implies \alpha$と$\gamma$の交線 ℓ, βとγ の交線 m とすると $\ell \parallel m$

である．

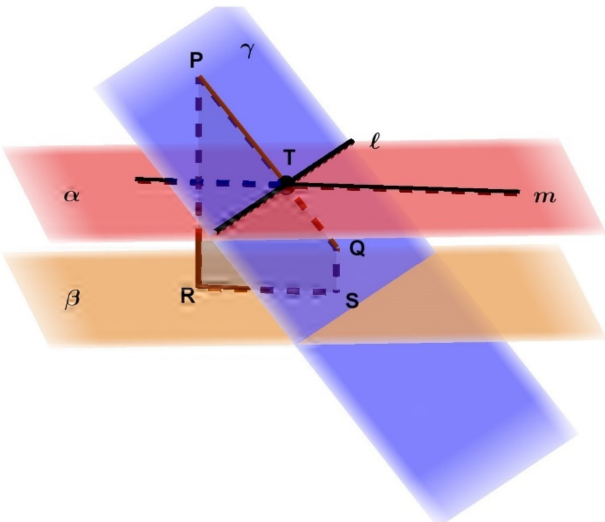


定理 5

平行 2 平面の 1 つに交わる平面は他の一つにもまた交わる．すなわち 3 平面 α, β, γ について

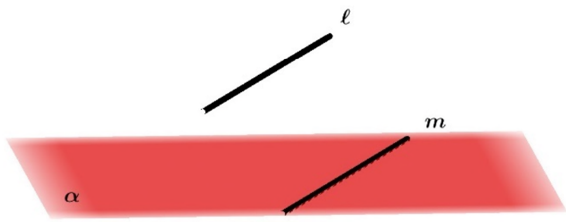
$\alpha // \beta, \alpha \nparallel \gamma \Longrightarrow \beta \nparallel \gamma$

である．



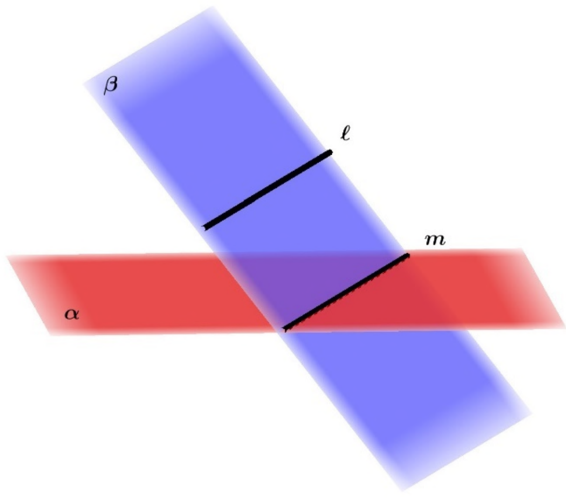
定理 6

平行 2 直線の一方を含んで他方を含まない (他方とは交わるかもしれない) 平面は他の一方に平行である．
すなわち，2 直線 ℓ, m および平面 α について
$\ell // m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Longrightarrow \ell // \alpha$



定理 7

平面に平行な直線は，これを含んでこの平面に交わる任意の平面の交線と平行である．
すなわち，平面 α および α 上にない直線 ℓ について，ℓ を含む平面 β を任意にとり，平面 α と β の交線を m とすると
$\ell // \alpha \Longrightarrow \ell // m$



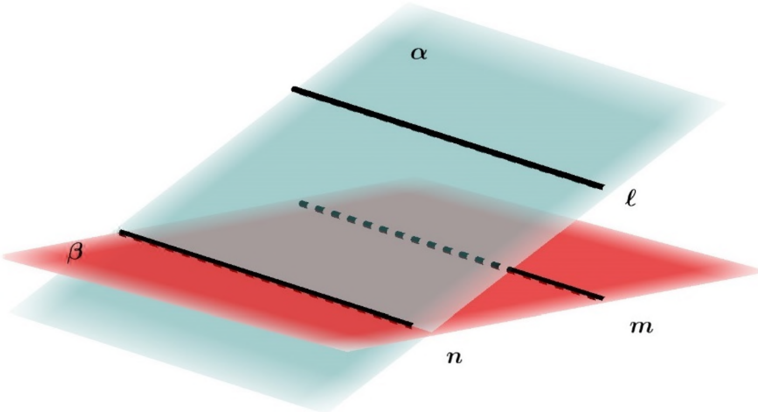
(これは定理 6 の逆である．)

定理 8

平行 2 直線のおのおの 1 つを含む平面が交わるときは，その交線はもとの直線に平行である．すなわち

2 直線 ℓ, m について，直線 ℓ を含む平面 α, 直線 m を含む平面 β が交線 n で交わるとき

$\ell // m \Longrightarrow \ell // n, m // n$

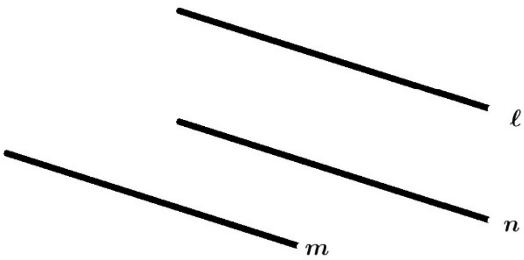


定理 9

同一直線に平行な直線は平行である．

すなわち 3 直線 ℓ, m, n について

$\ell // m,\ m // n\ \Longrightarrow \ell // n$

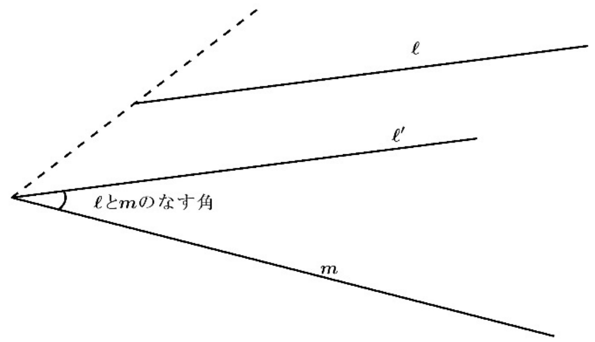


定理 10 平行な平面上のなす角

点 O において交わる 2 直線 ℓ, m に対し，$\ell \mathbin{/\!/} \ell', m \mathbin{/\!/} m'$ なる 2 直線 ℓ', m' が点 O$'$ で交わるとする．このとき，ℓ, m のなす角と ℓ', m' のなす角は等しい．（または補角をなす．）

定義 1 空間内の 2 直線のなす角

平面上の 2 直線 ℓ, m のなす角を，同一平面上にある，ℓ, m と平行な 2 直線のなす角で定義する．



定義 2 直線と平面の垂直

直線 ℓ が平面 α 上にあるいかなる直線とも垂直であるとき，直線 ℓ と平面 α は垂直，すなわち

$\ell \perp \alpha$

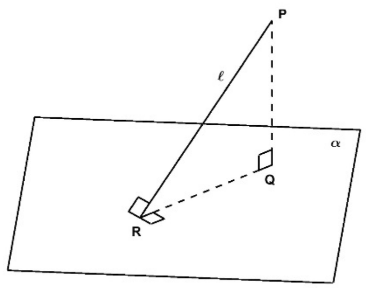
と定義する．

定義 3 直線と平面のなす角

直線 ℓ と平面 α のなす角を，ℓ 上の点 P, P から平面 α に下ろした垂線の足 Q, ℓ と α の交点 R とするとき

$\angle$PRQ

によって定めることとする．



定理 11 直線と平面の垂直

直線 ℓ が平面 α 上の 2 直線 m_1, m_2 と垂直であるとき，平面 α 上の任意の直線は ℓ と垂直に交わる．
すなわち，$\ell \perp m_1, \ell \perp m_2 \Longrightarrow \ell \perp \alpha$

定義 4 2 平面のなす角の大きさ

2 平面 α, β が交線 PQ で交わるとき，平面 α, β 上の直線 ℓ, m を

$\ell \perp$ PQ$, m \perp$ PQ

となるようにとる．このとき，2 平面 α, β のなす角を，ℓと m のなす角をもって定義する．

定義 5 2 面角と平面角

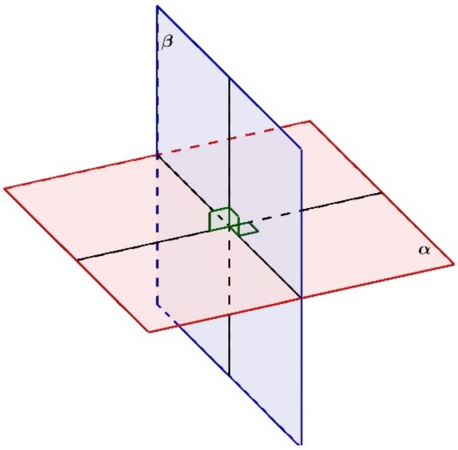
2 つの半平面 α, β が交線 PQ で交わるとき，2 平面がつくる図形を 2 面角と呼ぶ．
α, β 上にあり PQ と直交する半直線 ℓ, m がなす角を平面角と呼び，平面角の大きさを用いて 2 面角の大きさを定義する．

定義 6 平面と平面の垂直

2 平面 α, β について

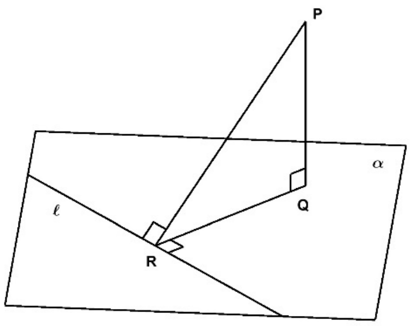
$\alpha \perp \beta \iff \alpha$と$\beta$の平面角が$\angle$R

と定義する．



定理 12 三垂線の定理

平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q , Q から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると，直線 PR は ℓ に垂直である．すなわち，PQ$\perp \alpha$, QR $\perp \ell \Longrightarrow$PR $\perp \ell$



定理 12 系 三垂線の定理

(1) 平面 α 外の 1 点 P より α に下ろした垂線の足を Q , P から α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R とすると

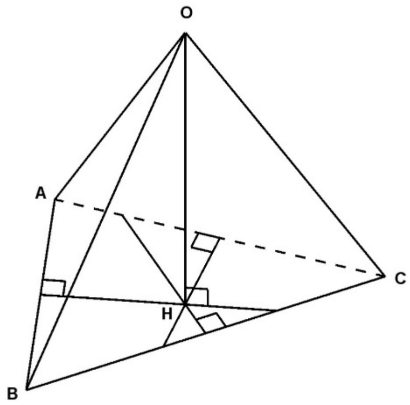
$$\mathrm{PQ} \perp \alpha, \mathrm{PR} \perp \ell \Longrightarrow \mathrm{QR} \perp \ell$$

(2) 平面 α 外の 1 点 P より α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足を R，α 上 R を通る ℓ の垂線に P から降ろした垂線の足を Q とすると

$$\mathrm{PR} \perp \ell, \mathrm{QR} \perp \ell, \mathrm{PQ} \perp \mathrm{QR} \Longrightarrow \mathrm{PQ} \perp \alpha$$

定理 13「瞬間外心検知器」の原理

三角錐 O-ABC において，OA= OB = OC であるとき (三角錐の稜線がすべて等しいとき)
O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は，△ABC の外心と一致する．



定義 7 体積の定義

(1) 一辺の長さが単位長さである立方体の体積を単位体積と定義する．
(2) 合同な空間図形の体積は等しい．
(3) 2 つの空間図形を「あわせて」できる図形の体積はもとの 2 つの空間図形の面積の和となる．
(4) **同一平面上におかれた 2 つの立体を，この平面に平行などんな平面で切っても 2 つの切り口の面積が常に等しいとき，この 2 つの立体の体積は等しい．**
（一般に「カヴァリエリの原理」と呼ばれる．）

系

(i) 底面積と高さの等しい 2 つの角柱の体積は等しい．
(ii) 底面積と高さの等しい 2 つの角錐の体積は等しい．

定理 14 角柱の体積

(i) 縦，横，高さが a, b, c である直方体の体積は abc である．
(ii) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 三角柱の体積は Sh である．
(iii) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 角柱の体積は Sh である．

定理 15 角錐の体積

(i) 三角錐の体積は，同じ高さである三角柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ である．
(ii) 角錐の体積は，同じ高さである角柱の体積の $\dfrac{1}{3}$ である．

定理 16 円柱・円錐の体積

(i) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 円柱の体積は，Sh である．
(ii) 底面積が S，高さが h である (直・斜) 円錐の体積は，$\dfrac{1}{3}Sh$ である．

定義 8 球の定義

空間内において，中心からの距離が一定である点の集合を球と呼ぶ．

定理 17 球の切断面

球 (面) を平面で切断してできる図形は，円である．

定理 18 球の体積

半径 r の半球の体積は，底面が半径 r の円で，高さが r である円柱の体積から，底面が半径 r の円で高さが r である円錐の体積を引いたものに等しい．すなわち，半球の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$，球の体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ である．

定理 19 球の表面積

半径 r の球の表面積を S とすると，$S = 4\pi r^2$ である．

定理 20

3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 $\angle$O-XYZ において

$\angle \mathrm{XOY} + \angle \mathrm{YOZ} > \angle \mathrm{ZOX}$

定理 21

凸 4 面角の面角の和は $4\angle \mathrm{R}$ より小さい．すなわち，凸 4 面角 O-XYZW について

$\angle \mathrm{XOY} + \angle \mathrm{YOZ} + \angle \mathrm{ZOW} + \angle \mathrm{WOX} < 4\angle \mathrm{R}$

補助定理 22-1

$\chi = V - E + F$ を「オイラー標数」と呼ぶことにする．すると，以下が成り立つ．

(I) n 角形のオイラー標数は 1 である．

(II) ある面の頂点を結んで分割してもオイラー標数は変化しない．

補助定理 22-2

多面体について，以下が成り立つ．

(I) n 個の頂点を持つ多面体の 1 つの頂点とその周りの多面角を取り去って，$n-1$ 個の頂点を持つ多面体としてもオイラー標数 χ は不変である．

(II) n 角錐のオイラー標数 $\chi = 2$.

定理 22 オイラーの多面体定理

ある多面体が「頂点を取り除く操作」を続けることで n 角錐に変形できるとき，もとの多面体の頂点数 V，辺数 E，面数 F とすると

$V - E + F = 2$

定理 23 オイラー多面体定理の拡張

ある多面体の「穴」の数が g であるとき (この g を種数と呼ぶ)，もとの多面体の頂点数 V，辺数 E，面数 F とすると

$\chi = V - E + F = 2 - 2g$

定義 9 正多面体

凸多面体のうち，以下の 3 つの条件を満たすものを正多面体 (あるいはプラトンの立体) と呼ぶ.

1° すべての辺の長さが同じである．(すべての面は正多角形である．)
2° 各頂点の周りの構造 (多面角) がすべて合同である．(どの頂点も周りの角がすべて等しい．)
3° 各面を構成する正多角形はすべて合同である．(1 種類のみの正多角形の面から構成される．)

特に，n 枚の面からなる正多面体を正 n 面体と呼ぶ.

補助定理 24-1 正多面体の面について

正多面体を構成する面は正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限る.

補助定理 24-2 シュレーフリ記号

ある正多面体が 1 つの頂点につき正 p 角形が q 面集まってできているとき，この多面体を

$\{p, q\}$

と表すことにする．(これをシュレーフリ記号と呼ぶ．)
すると，正多面体として存在できるのは $\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,3\}, \{5,3\}$ の 5 種のみである.

定理 24 プラトンの定理

正多面体は 正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種のみが存在し，他には存在しない.