論理的思考を促進する立体幾何教材の開発と検証

武蔵高等学校中学校

赤間　祐也

1.　研究の動機と背景

1.1.　数学における「空間図形」分野の取り扱いと研究の動向

中学校・高等学校数学科の単元のなかで「空間図形」の分野はまとまった単元としては中学 1 年と高校 1 年（数学 A）のみで取り扱われている．文部科学省（2018）は中学校数学図形領域のねらいの一つとして「図形について論理的に考察し表現できるようにすること」を挙げており，指導の意義として「基礎的な概念や性質についての理解を深め，それを活用して問題の発見や解決に取り組むことが必要である」こと，「性質や関係を直観的に捉え，数学的な推論により論理的に考察し表現する力は色々な分野での学習や活動において重要な役割を果たすこと」を挙げている．また，文部科学省（2019）は高等学校数学科の科目「数学 A」の育成すべき思考力・判断力・表現力等について，(1) 図形の性質の単元については「図形の構成要素の関係などに着目し，新たな図形の性質を見いだし，論理的に考察したり説明したりできるようにするとともに，図形の性質や作図について統合的・発展的に考察できるようにする」ことを挙げている．以上のように，数学科の図形領域において養うべき資質・能力は平面・空間を問わず論理的な思考，直観的な思考の双方が重要とされるが，ことさら空間図形の分野に関しては一般的には空間認識能力などの直観的な見方・考え方が中心とされることが多い．

空間図形指導の研究の動向について和田（2020）は「空間図形の指導には一貫したカリキュラムや指導法が見当たらない，すなわち基盤となる理論が整備されていないという課題意識に基づいた研究が多い」と述べており，論理的な思考については「空間図形では論証を明確に位置付ける研究は少ない」こと，「論証を位置付けた先行研究については，ほぼ中学校 1 年生で検討されているので，他の学年でも空間図形に論証を位置付けていくべき」であることを述べている．

また，私立学校を中心とした中高一貫教育を行っている学校において，数学の授業は学習指導要領に基づきながらも比較的各校の独自性を活かした教育課程が設計されていることが多い．赤間（2021）によると，私立中高一貫教育校 397 校を対象としたアンケートの結果，回答の得られた 135 校のうち中高一貫教育校向けのいわゆる「検定外教科書」を教材に用いている学校が 82 校，中学校課程の数学の授業について「代数」と「幾何」のように分野別に授業を行っている学校が 63 校存在した．また，初等幾何教育で最も養うべき知識・技能や資質・能力について，「図形の性質を理解すること」が 94.1%を

占めた．いわゆる「検定外教科書」においては教科内容の知識・技能を中心とした系統的な構成が取られているものが多く，知識・技能の習得に最も力を入れている学校が多いものと思われる．

一方で「演繹的推論に基づいて表現すること」についても79.3%の回答者が最も重要であるとみなしているとの結果が得られた．しかし，このような論理的に考える力や態度を養うために具体的にどのような活動が必要であるかを明確に規定している教材は少ないように感じられる．

1.2. 本校の図形領域における教育の特徴

本校は併設型中高一貫教育校である男子校である．本校においても中学校課程の数学の授業を「代数」と「幾何」の分野別に行っている．

本校数学科の特徴として，使用教材として「検定外教科書」ではなく自校で教材を作成し，授業において使用している点が挙げられる．幾何のうち平面幾何の領域においては「中学の幾何」という自校で作成した教材を使用しており，この教材は「基礎事実（公理にあたるもの）」と定義を前提として定理を証明していく公理的方法で書かれている．恐らく数学的推論や数学の論理的な厳密性を重視し，数学における真正な学びを実現することを目的として作成されているように思われる．一方でこの教材が一体何のためにこのようなスタイルをとっており，その目的や養うべき資質・能力が学習者にとって明確なものとはなっておらず，また授業においてどのように生徒に活動を指せるか，についても規定されていない．

① 「基礎事実」（公理のようなもの）を議論の出発点として定め，ヒルベルト（2005）に準ずる公理的方法で書かれている．

基礎事実 I　結合公理	基礎事実 IV 合同公理
基礎事実 II　順序公理（線分の移動）	基礎事実 V　平行線公理
基礎事実 III 順序公理（角の移動）	

② 公理や証明済の定理，命題を用いて演繹的推論により次の定理や命題を導いていく形式である．

③ 問題解決場面は主に今まで証明した定理を用いて証明可能である証明問題に限られている．

④ 証明した命題に対してその逆命題を背理法を用いて証明するなど，間接証明法での証明場面を多く設けている．

図 1 自校作成教材「中学の幾何」の特徴

この傾向は多くの中高一貫教育校についても同様なものと感じられる．また，論理的に考察し表現できる力，統合的・発展的に考察する力など，特に初等幾何を題材とすることが適しているとみなされている力を養成するための授業改善は中高一貫教育校に関わらず，多くの中学校や高等学校で必要とされているものであると思われる．

また，「幾何」の授業では平面幾何を主に中学 1 年から中学 2 年で扱い，立体幾何については主に中学 3 年生で扱っている．立体幾何については自校作成教材はなく，毎年担当者が各自プリントなどを作成するなどして授業を行っている．

1.3. 論理的に考えることについて

前節で述べた通り，初等幾何を題材として教育を行うことの目的の 1 つとして，論理的に考えることや論理的に考える態度を養うことが挙げられる．一方で，「論理的に考える」という言葉は数学科以外の教科でも，日常生活においても用いられる．数学科においては演繹的推論による思考が中心となるであろう．数学の学問体系は古くは古代ギリシャにおけるユークリッド『原論』から現代数学まで，ある論証の前提となる公理や原理を置き，既知の知識から演繹的推論によって体系的に知識を得ていく「公理的方法」によって構築されてきた．現在では学問の方法として広く採用されている方法である．

本研究は筆者の勤務校における初等幾何カリキュラム設計の文脈で考えることにする．そこでここでは論理的思考について，特に数学科における公理的方法による思考を中心として検討する．

2.　研究の目的

前章において，空間図形の単元において論理的思考を実現するようなカリキュラムや指導法が必要とされていること，一方でそのような研究については十分に多くないこと，論理的思考について公理的方法による思考を中心として定義すること，本校においては平面幾何分野においては公理的方法によって書かれた自校作成教材は存在するが立体幾何分野については存在していないことについて述べた．本章ではこれらの背景をもとに，研究の目的を以下のように規定する．

■　教材の作成（第 3 章）

本校で使用している自校作成教材に接続するような，公理的方法によって書かれた立体幾何分野の教材を作成する．

■　授業および単元指導案の設計（第 4 章）

公理的方法によって書かれた教材の魅力や意義を明確にするような指導法を検討し，単元指導案として授業内の活動や使用するワークシートを設計する．

■　活動およびワークシートの評価（第 5 章）

公理的方法によって書かれた教材の指導法について評価するための調査を検討し，授業や指導法について評価する．

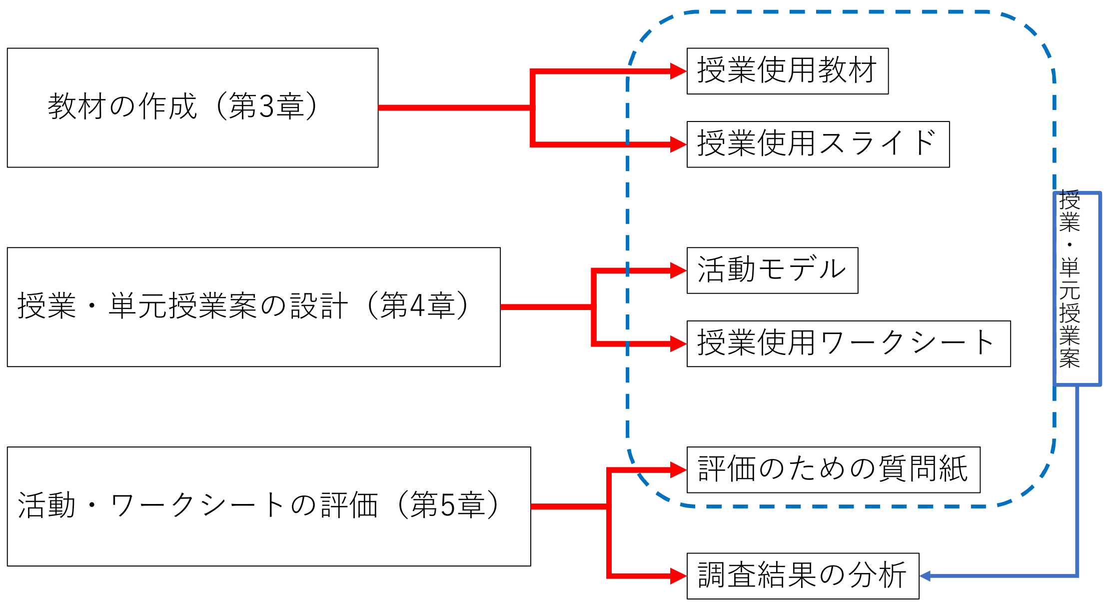


図 2 研究の概略

3. 教材の作成

本章ではまず自校作成教材に接続するような，公理的方法によって書かれた立体幾何分野の教材を作成することについて検討する．

3.1. 研究の方法

前章で述べた通り，本校では中学校数学科の過程において平面図形の分野では自校作成教材「中学の幾何」を利用して授業を行っている．一方で，立体幾何の分野においては教材を持たず，毎年授業担当者がプリントなどを作成して授業を行っている．

筆者は 2016 年度，2020 年度，2021 年度と三度にわたって中学 3 年生を対象とした数学「幾何」の授業を担当し，その際に授業で使用するプリント教材を作成してきた．そこで，参考文献などをもとにすることで，今までに作成したプリントから自校作成教材と同様に公理的方法で書かれた教材を作成する．

3.2. 内容の吟味

教材の内容として，中学校 1 年数学「空間図形」の単元，および高等学校数学 A「空間図形」の単元で扱う内容をもとにした．

公理的方法で教材を作成するにあたり，秋山（2012）を参考とした．秋山（2012）は平面幾何における公理に，「1 つの直線とこの上にない 1 点を含む平面は必ず存在する．」のみを付け加えて直線や平面の位置関係について公理的方法で議論を進めている．これを参考にして公理系を定め，難解にならない範囲でなるべく直観的な説明を排除して公理的方法により教材を作成した．また，教材の前半の単元（§1～§7）では主に図形の定性的な性質について扱い，その後長さや体積など図形の計量について取り扱うようにした．教材の後半（§15～§18）はオイラーの多面体定理などやや発展的な内容とし，前半に比べてやや厳密性を省略しながらも興味がある学習者が自分で読めるような構成とした．教材に掲載した公理・定義・定理については付録 A を参照されたい．

3.3. 教材の原稿作成と製本

前項で吟味した内容について原稿を LaTeX で作成し，PDF データとしたものを印刷業者に依頼し，冊子体として製本した．図 2 は作製した教材『武蔵中学校の幾何 立体幾何編』の目次である．

また，LaTeX で作成した原稿を LaTeX の Beamer クラスで書き直し，授業においてプロジェクターで投影するためのスライドを作成した．Beamer での教材作成については既に赤間（2020）で報告したのでそちらを参照されたい．また，各授業で使用したスライドについては付録 B に添付する．

図 3 作成教材「武蔵中学校の幾何 立体幾何編」目次

4. 授業および単元指導案の設計

本章では公理的方法によって書かれた教材の魅力や意義を明確にするような指導法を検討し，公理的方法による思考を学習者に起こすことのできるような単元指導案や授業内の活動，使用するワークシートを設計することを考える．

4.1. 研究の方法

本研究は公理的方法による思考を学習者に起こすことを目的としている．そこで，公理的方法についての先行研究を文献調査し，それをもとに体系をつくることの動機や体系のよさに対する理解につながる活動を設計する．

4.2. 公理的方法に関する杉山（1986）の先行研究

公理的方法が意味するところも時代によって異なるが，杉山（1986）は公理的方法の考えについて，「根拠（公理，原理）を探る」ことと，「仮設（公理）をおいて考える」ことの 2 つに集約されるとしている．また，杉山（1986）は教育において公理的方法を考えるときに，公理的方法を学習指導の方法とする立場と，公理的方法を学習指導の目的とする立場があるとする．

公理的方法を学習指導の方法とする立場は公理的方法とは「公理的に体系化された数学，演繹的な数学」のための方法と考え，その指導は「演繹的に説明する数学の指導」であるとする立場であるとする．すなわち，公理的方法を用いる目的は公理的方法が「数学の知識伝達の能率的な方法である」「演繹的に推理する力を伸ばす方法である」「公理的方法を理解させる方法で」あり，「数学の特質を理解させる方法」であるからとするものである．一方，公理的方法を学習の目的とする立場は公理などについての知識を知ることにとどまらず，公理的方法を自ら使えること，すなわち「公理的方法に含まれている基本的な考えを理解し，それを能力として身に着けている」ことを目的とする立場である．

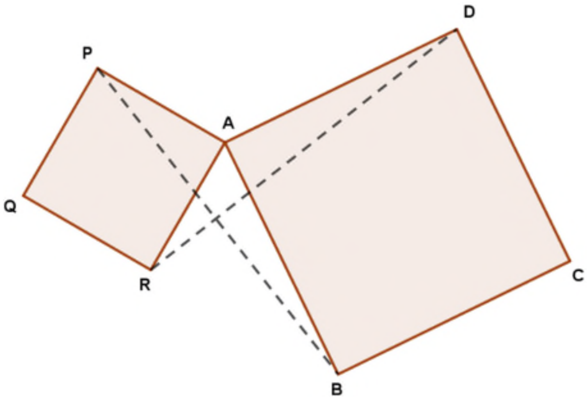
前者の立場に立った場合，公理的方法とは単に数学における方法に過ぎず，数学の知識・技能の習得や問題解決能力を向上させることが目的とされることになる．一方で，杉山（1986）は後者の立場に立つことにより，論理的な思考や批判的な思考を行うための力を養い，統合的・発展的に考える力を養うことが期待されるとする．

本研究においては公理的方法を学習指導の方法とするのではなく目的とすることを目指すため，杉山の立場に立ち，公理的方法の活用を意図した活動を取り入れることで論理的に考える力や自ら発展的に学習を進める態度を養うことを検討する．

4.3. 杉山（1986）における要素分析の考え方とその指導について

本項では公理的方法を目的とする指導を実現するためにはどのような指導が考えられ

（示すべき命題）正方形 ABCD，正方形 APQR が点 A を共有しているとき BP=RD



（証明）

△APB，△ARD において

AP = AR

AB = AD

∠PAB = ∠RAD

∴ △APB ≡ △ARD

したがって，BP = RD (Q.E.D)

図 4 杉山（1986）における証明を見返す活動の題材例

るかを検討する．杉山（1986）は公理的方法の考えに基づく論証の指導において，証明の「要素」を分析する活動を取り入れることを提案する．証明における「要素」とは証明すべき命題における図形の構成要素（辺の長さや角度の大きさや相等関係などの図形に与えられた条件）だけでなく，その証明における既知の定理や公理，定義なども含むものを指す．杉山は証明を「要素を分析する」という目的をもつものと考えることで，公理的方法を学習者が「新しい事実を説明し，納得させるためのもの」としてだけではなく，「経験的に見つけた事実や予想される判断の真なることを確かめ，その要素を分析し，その分析された要素に基づいて諸命題を構成しつつ体系を作り上げていく方法」とみることができる．すなわち，①証明や説明することの意義を与えること，②証明によりさらに発展的な学びにつなげることができること，が可能であるとしている．

例の 1 つとして杉山は中学校数学における面積の導入場面を挙げる．面積は小学校算数においても扱っており，学習者はすでに知識としては面積のことを知っている．その上で中学校数学において再び面積を扱うにあたって，杉山は論証の導入として「仮定していること，根拠にしていることに目を向けさせる」ために利用することを提案する．例えば面積公式を扱うにあたって，様々な図形の性質や定理，すなわち証明の「要素」が使われている．これらを列挙する活動を続けることで，「何から何が説明できたのかを整理していくと，体系に近いものを作ること」ができ，そこから体系的に考えることの意味を見出させることができる，と杉山は主張する．すなわち，証明の要素を分析することで体系的に説明することの意義を感じさせる，ということである．

もう 1 つの例として，杉山は証明を見返す活動を提案する．すなわち，ある問題について証明が与えられたとき，その構成要素を分析することで例えば問題の前提を変えても成り立つことが導ける．例えば図 1-2 の例であれば証明の要素を分析し，与えられた条件のうちどの条件が使われているか検討することで証明中の△APB，△ARD が作れるような問題であればどのような問題でも証明することができることを発見することができる．す

なわち，証明の要素を分析することで発展的に考えたり，新たな知識を得ることができる．ということである．

4.4. 杉山（1986）のモデルの妥当性と先行研究について

中学校高等学校数学科の教材研究，および授業実践研究において先行研究や引用文献に杉山（1986）を挙げる研究は多い．例えば図形指導において証明することの意義や必要性を学習者に実感させることは古くからの課題であり，杉山（1986）をもとにした研究として奥村（1994），柳本ほか 3 名（2000），高本・岡崎（2008），井口・岩崎（2014）などがみられた．また，証明を用いて発展的な学びに結びつける研究としては濱中（2016），波津久・中川（2017）などが挙げられる．

4.5. 杉山（1986）をもとにした活動モデルの枠組み

杉山（1986）における「要素分析」の考えをもとにして，次の 2 種類の活動を設計する．

（活動 1）「体系的に考えることを意識させるための発問」

（活動 2）「体系的に考えたことを検証する活動」

(1) 体系的に考えることを意識させるための発問

要素分析を伴う活動を毎回の授業中に行い，体系的に考える態度を定着させるために行う．定理およびその証明を扱った際に，その前提にある条件を変えたらどのような命題が作れるかを発問し，派生させることが可能な命題やその真偽などの予想について教室全体で共有する．手順については以下のように行う．（図 5 を参照．）

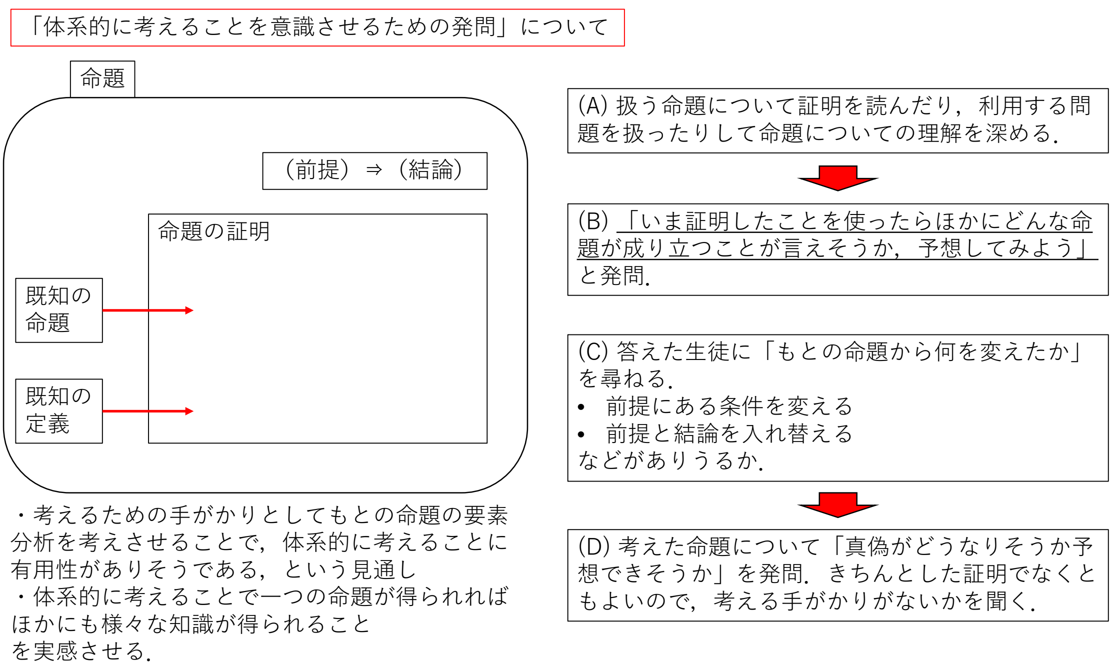


図 5 「体系的に考えることを意識させるための発問」についての概略図

(A) その授業で扱う命題について証明を読んだり，扱う命題を利用するような問題を解くなどして命題についての理解を深める．

(B) 「いま証明したことを使ったらほかにどんな命題が成り立つことが言えそうか，予想してみよう」と発問．（体系的に考えることを意識させるための発問）

発言を促し，適宜指名するなどして考えを集める．意図が伝わらないようであればどんな手立てがありそうか（前提となる図形を三角形から四角形に変える，図形の個数を変えてみる）などヒントを出しながら発言を促す．

(C) 出てきた命題について，発問に答えた学習者に「もとの命題から何を変えたか」を確認．どのようにしたら派生する命題がつくれるかを共有する．

(D) 出てきた命題について「真偽がどうなりそうか予想できそうか」を発問．きちんとした証明でなくともよいので考える手掛かりがないかを確認．

各授業で行うことにより，新たに命題を生成したり，その真偽を検討したりするにあたってもとの命題の前提や結論，証明の要素などと比較するなどの体系的に考えることの有用性についての見通しを定着させることを意図するものである．

(2) 体系的に考えたことを検証する活動

「体系的に考えることを意識させるための発問」において元の命題から体系的に考えることを促すことは先に述べた通りである．さらに「体系的に考えたことを検証する活動」では真偽の予想について検討した後，実際にその予想について検討する活動を行う．

体系的に考えることの有用性についての見通しについて，実際に活動を行うことで学習者に検証させることを目的とする．手順については以下のように行う．（図 6 を参照．）

(A)～(C)までは「体系的に考えることを意識させるための発問」と同様．命題についての理解を深め，そこから派生する命題について発問する．

(D) 出てきた命題について，真偽について実際に証明してみることを指示．考えた命題の真偽をワークシートに書かせ，真偽を考えさせる．真の場合はその証明を，偽の場合はどうしたら真になりそうかを考えさせる．

(E) 出てきた命題及びその証明や真偽をクラスで共有．その際に考えるための手がかりとして何が使えそうか，どのように考えたかを共有．もとの命題の証明の要素が使えるのではないかという見通しをもたせる．

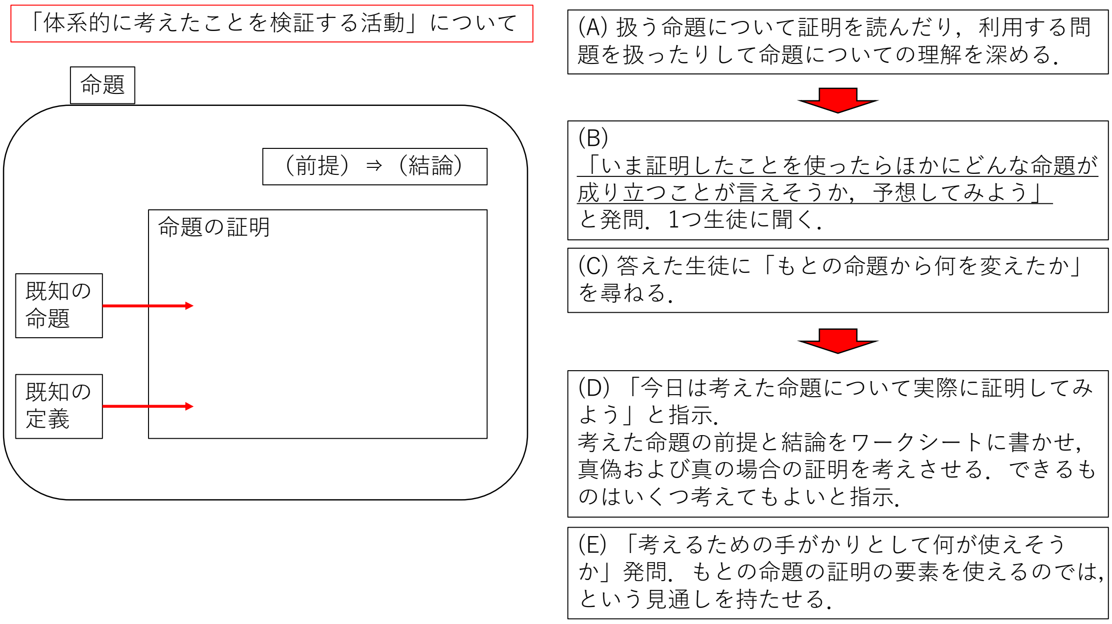


図 6 「体系的に考えたことを検証する活動」についての概略図

4.6. 単元授業案の設計

前章において，使用教材『武蔵中学校の幾何 立体幾何編』について作成した．この教材は自校作成教材と同様に数学的推論や数学の厳密性を重視し，真正な学びを実現することを目的としているが，一方で数学書のように行間を補いながら読み進めることが必要とされる．そこで，この教材の特性を利用し，「体系的に考えることを意識させるための発問」および「体系的に考えたことを検証する活動」を取り入れた授業を設計する．

「体系的に考えることを意識させるための発問」「体系的に考えたことを検証する活動」については主に証明を扱う単元の前半（第 1 回から第 8 回）を利用して設計した．

4.7. 活動の設計

単元の第 1 回から第 7 回までの授業に活動 1，活動 2 を組み込む．授業使用教材（図 6）をもとに活動 2 を行う場面について説明する．なお，以下の（A）～（E）は前述の「体系的に考えたことを検証する活動」の手順に対応する．第 5 回授業では定理 6「2 直線 ℓ, m および平面 α について，$\ell // m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Rightarrow \ell // \alpha$ 」という定理を題材としている．この定理について（A）証明を理解したり，利用できる証明問題を扱ったりした後に（B）もとの定理から派生しうる命題について考えさせる．

表 1 単元授業計画

各クラスの授業日程					内容の概略	
回	A 組	B 組	C 組	D 組		
1	10/11	10/5	10/5	10/5	§1 平面から立体へ（①調査実施）	活動実施期間
2	10/17	10/12	10/11	10/11	§2 「平面」と「空間」	
3	10/18	10/17	10/12	10/12	§3 平面の平行と交線	
4	10/21	10/19	10/18	10/18	§3 平面の平行と交線	
5	10/24	10/21	10/19	10/19	§3 平面の平行と交線（活動・②調査実施）	
6	10/25	10/24	10/25	10/25	§5～§6 平面と直線・2 平面のなす角	
（二学期中間試験）						
7	10/31	10/31	11/1	11/1	§7 三垂線の定理	
8	11/1	11/2	11/2	11/2	§8 三角錐の体積（①調査実施）	
9	11/7	11/7	11/8	11/8	§9-10 体積の定義とカヴァリエリの原理	
10	11/8	11/9	11/9	11/9	§11 円柱・円錐・球の体積	
11	11/14	11/14	11/15	11/15	§12 体積と切断面	
12	11/15	11/16	11/16	11/16	§13 多面角	
13	11/22	11/28	11/22	11/22	§14-15 多面体	
14	11/28	12/2	11/29	11/29	§17 正多面体	

予想される例としては例えば

定理 6 の裏：$\ell \nparallel m$ かつ ℓ は α 上になく m は α 上 $\Rightarrow \ell \nparallel \alpha$ （偽）

定理 6 の逆：$\ell \parallel \alpha$ かつ ℓ は α 上になく m は α 上 $\Rightarrow \ell \parallel m$ （偽）

直線を平面に変更：$\alpha \parallel \beta$ かつ ℓ は α 上になく ℓ は β 上 $\Rightarrow \ell \parallel \alpha$ （真）

などが考えられる．

考えた命題について，（C）もとの定理 6 との関係を確認する．（D）学習者の挙げた例について真偽を考えさせ，真のものについては証明させる．偽のものについてはどのような反例が存在するかを尋ね，どう変えたら真になりそうかを尋ねる．

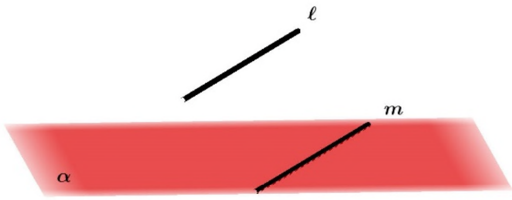
それぞれの活動はまずワークシートを利用して個別に考えさせ，教師が発問の上クラスで共有する．授業の終末に（E）証明を考えるための手がかりについて共有する．定理 6 の証明で利用した定義や定理などが派生する命題でも使えることを確認し，要素分析が有用であることを認識させる．

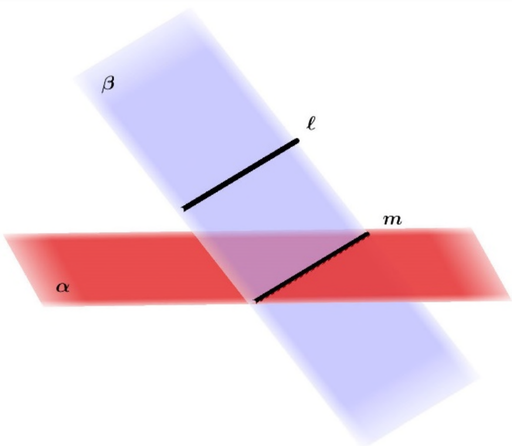
定理 6

平行２直線の一方を含んで他方を含まない (他方とは交わるかもしれない) 平面は他の一方に平行である．

すなわち，２直線 ℓ, m および平面 α について

$\ell // m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Longrightarrow \ell // \alpha$





(証明)

$\ell // m$ より，２直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．

ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．

すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．

すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．

よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell // m$ に矛盾．

$\therefore \ \ell // \alpha$ (Q.E.D.)

図 7 授業使用教材の例

4.8. ワークシートの設計

前節では単元授業について設計し，活動２の例について取り上げた．同様について第１回授業から第７回まで活動を具体的に設計し，ワークシートを作成した．第１回授業から第 14 回授業までの作成したワークシートは付録 C を参照されたい．

4.9. 授業の実施

表 1 の授業計画に基づき，本校の中学 3 年生生徒 174 名を対象として先述した授業スライド，およびワークシートを利用して授業を実施した．授業の流れは概ね以下である．

(A) 単元の導入，あるいは前回の授業の振り返り．
（第 1 回）単元の導入として「瞬間外心検知器」を作り，実際に成りたつことを教卓で演示した．
（第 2 回～第 7 回）前回扱った問題について「体系的に考えることを意識させるための発問」を行い，黒板で集約した．
いずれも授業中の様子は付録 D に添付した．

(B) 本時の内容の説明．プロジェクターを用いて授業スライドで説明した．

(C) 本時の活動．ワークシートを利用して生徒に活動させる．「体系的に考えたことを検証する活動」はここで行う．順次机間巡視し，出てきたアイデアを共有した．
活動の集約の様子は付録 E を参照されたい．

(D) 活動の共有．生徒のワークシートについて教師用の iPad で写真に撮りプロジェクターを利用して共有．適宜考え方を確認する．共有したワークシートのうちのいくつかについては付録 F に添付した．

(E) 授業のまとめ．本日の内容についてまとめ，理解度について確認．

4.10. 考察

「体系的に考えることを意識させるための発問」の様子については付録 D に示した通りである．第 2 回から第 8 回授業において前回の授業を振り返る場面で行ったところ，いずれのクラスでも様々な意見が出た．

また，「体系的に考えたことを検証する活動」の様子については付録 E および付録 F に示した通りである．どのクラスでも証明の要素を分析し，その結果をもとに新たな命題やその真偽について検討することができた．

以上より，少なくとも「体系的に考えることを意識するための発問」「体系的に考えたことを検証する活動」について授業内に組み込み，実施することについては成立したことがわかる．

5.　活動およびワークシートの評価

本章では公理的方法によって書かれた教材の指導法について評価するための調査を検討し，授業や指導法についての評価について論ずる.

5.1.　研究の方法

授業において行った活動が体系をつくることの動機や体系のよさにつながることを質問紙調査によって検証する．質問紙調査は初回授業前と最終回授業後に行う①体系の認識についての調査と，実施した活動を評価するための②活動の評価のための調査の 2 種を行い，②によって活動が十分に機能したかどうかを，①によって単元の前後で体系の認識がどのように変化したかを調査する.

5.1.1. 研究の時期及び対象者

授業実施および調査の時期：2022 年 10 月 5 日～11 月 1 日
中学 3 年数学のうち「幾何」の授業を利用して実施

対象者：武蔵中学校　中学 3 年生　174 名

5.1.2. 調査の内容

①　体系の認識についての調査

学習者の「体系をつくることの動機」や「体系のよさに対する理解」の様子を明らかにすること，および単元の前後における変化を捉えるために単元冒頭と終了時に実施する.

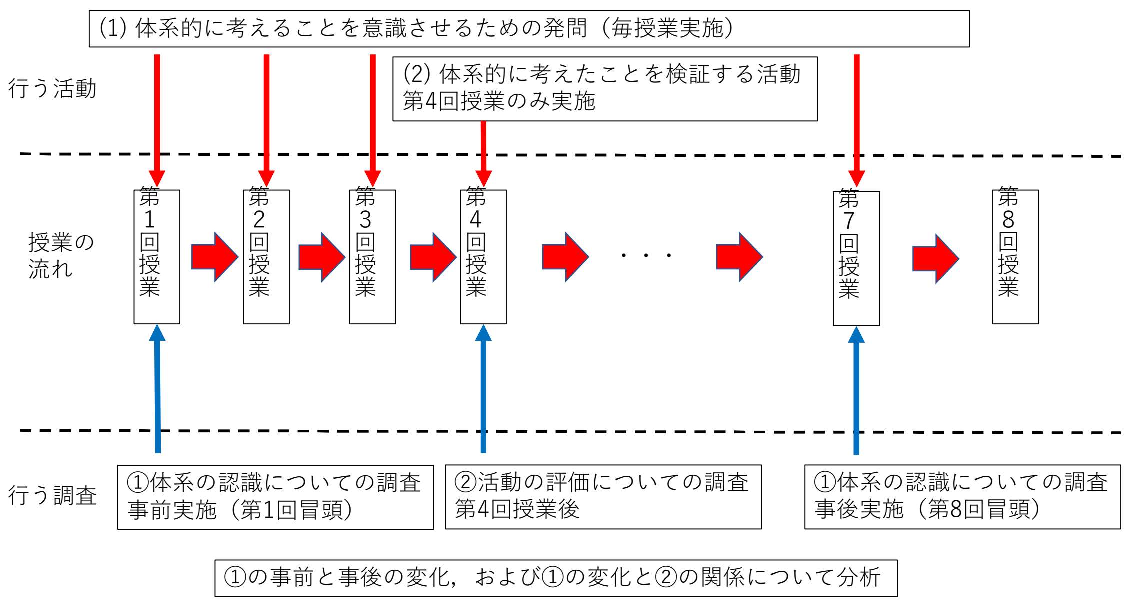


図 8 活動と調査の関連性について

質問項目には体系的に書かれている証明や説明に対する特徴についての意識（3 項目）と，自分自身が体系的に考えることについての意義についての項目（3 項目）を設けた．質問項目を図 9 に示す．

回答は「1 当てはまる 2 どちらかといえば，当てはまる 3 どちらかといえば，当てはまらない 4 当てはまらない」の 4 件法で回答を求め，各項目には理由の自由記述を設けた．

② 活動の評価のための調査

授業中に行う「体系的に考えたことを検証する活動」の評価，および「体系的に考えたことを検証する活動」が，先の「体系の認識についての調査」に与えた影響について評価するために実施する．質問項目については授業実践研究 II と同様に，活動への興味と活動の意義について評価する．質問項目は図 10 に示す．

回答は質問項目(1),(2)については「1 そう思わない 2 あまりそう思わない 3 そう思う 4 かなりそう思う 5 すごくそう思う」の 5 件法で回答を求め，各項目には理由の自由記述を設けた．質問項目(3)については自由記述とした．

1. 初等幾何の授業において，<u>体系的に書かれている証明や説明は，そうでないものと比べて，</u>
   (1) 理由や根拠を明らかにして読むことができる．（理由・根拠の明示）
   (2) 他の定理や定義とのつながりが分かる．（関連性の明示）
   (3) 知識として理解しやすい．（理解しやすさ）
2. 初等幾何の授業において，<u>自分自身が体系的に考え，証明したり説明したりすることは，あなたにとって，</u>
   (1) 数学の定理を証明する練習になっている．（証明の練習）
   (2) 筋道立てて考え，説明する力の練習になっている．（説明の練習）
   (3) 難しいことである．（難易度）

図 9「体系認識についての調査」の質問項目

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

(1) 今日行った活動は面白いと思った．（活動への興味）

(2) 今日行った活動は意義があると思った．（活動の意義）

(3) 授業に関する感想は？（自由記述）

図 10「活動の評価のための調査」の質問項目

5.1.3. 調査の手続き

「①体系の認識についての調査」は中学 3 年生 174 名のうち各クラス調査実施日に出席していた生徒を対象に実施した．事前調査については第 1 回授業の冒頭に，事後調査については第 8 回授業終了前に 10 分程度時間を取り，どちらも Google フォームを利用して生徒所持のタブレットから調査 web ページにアクセスし，解答する形をとった．使用した Google フォームの例については付録 G を参照されたい．

「②活動の評価のための調査」についても中学 3 年生 174 名のうち各クラス調査実施日に出席していた生徒を対象に実施した．第 11 回授業において活動を実施した後，ワークシートの記入欄にマークシート形式で回答する形をとった．質問紙の形式については付録 H を参照されたい．

5.2. 調査の結果と分析

本節では「体系の認識についての調査」「活動の評価のための調査」の結果について分析する．調査の結果データについては付録 I に添付した．

5.2.1. 調査の結果と分析

表 2 は「体系の認識についての調査」について第 7 回授業出席者合計 169 名を対象に，授業冒頭に行った事前調査の集計結果である．いずれの項目についてもすでに 8 割前後の

表 2 「体系の認識についての調査」集計結果

	1 当てはまる	2 どちらかといえば，当てはまる	3 どちらかといえば，当てはまらない	4 当てはまらない	合計
1(1)	58	97	12	2	169
理由・根拠の明示	34%	57%	7%	1%	
1(2)	66	78	22	3	169
関連性の明示	39%	46%	13%	2%	
1(3)	44	87	33	5	169
理解しやすさ	26%	51%	20%	3%	
2(1)	82	71	16	0	169
証明の練習	49%	44%	11%	1%	
2(2)	75	75	18	1	169
説明の練習	44%	44%	11%	1%	
2(3)	80	65	19	5	169
困難さ	47%	38%	11%	3%	

学習者が「1 当てはまる」「2 どちらかといえば，当てはまる」の項目を選択していた．

また表 3 は「活動の評価についての調査」について第 11 回授業出席者 166 名を対象に，授業終了後に行った調査の集計結果である（無記述を除く）．全体の 25%程度が「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」と強い肯定を，50～60%程度が肯定反応を示したことが分かる．

表 4 は「体系の認識についての調査」について第 14 回授業出席者合計 169 名を対象に，授業冒頭に行った事後調査の集計結果である．第 7 回授業において実施した事前調査と概ね同様の傾向が見られた．

表 3 「活動の評価のための調査」 集計結果

	5 すごくそう思う	4 かなりそう思う	3 そう思う	2 あまりそう思わない	1 そう思わない	合計
活動への興味	12 7%	28 17%	89 54%	25 15%	12 7%	166
活動の意義	16 10%	25 16%	99 61%	12 7%	9 6%	161

表 4 「体系の認識についての調査」事後調査の結果

	1 当てはまる	2 どちらかといえば，当てはまる	3 どちらかといえば，当てはまらない	4 当てはまらない	合計
1(1) 理由・根拠の明示	58 36%	79 49%	21 13%	2 1%	160
1(2) 関連性の明示	51 32%	87 54%	21 13%	1 1%	160
1(3) 理解しやすさ	51 32%	84 53%	25 16%	0 0%	160
2(1) 証明の練習	75 47%	69 43%	13 8%	3 2%	160
2(2) 説明の練習	64 40%	81 51%	13 8%	2 1%	160
2(3) 困難さ	77 48%	63 39%	17 11%	3 2%	160

表 5「体系の認識についての調査」事前と事後の変化の集計結果

	＋3	＋2	＋1	0	－1	－2	－3	合計
1(1)	1	2	29	88	34	2	1	157
理由・根拠の明示	1%	1%	18%	56%	22%	1%	1%	
1(2)	0	3	25	95	31	3	0	157
関連性の明示	0%	2%	16%	61%	20%	2%	0%	
1(3)	0	8	40	79	29	1	0	157
理解しやすさ	0%	5%	25%	50%	18%	1%	0%	
2(1)	0	2	34	79	37	5	0	157
証明の練習	0%	1%	22%	50%	24%	3%	0%	
2(2)	0	3	28	88	36	2	0	157
説明の練習	0%	2%	18%	56%	23%	1%	0%	
2(3)	3	3	29	92	23	7	0	157
困難さ	2%	2%	18%	59%	15%	4%	0%	

表 5 は「体系の認識についての調査」について，事前調査と事後調査両方の回答者を対象としての回答状況の変化を集計したものである．この表では事後と事前で数値の差をとって比較している．例えば事前と事後で「3 どちらかというと当てはまらない」から「1 当てはまる」に 2 つ正の変化をした場合は「＋2」に,「2 どちらかというと当てはまる」から「3 どちらかというと当てはまらない」に 1 つ負の変化をした場合は「－1」に分類している．いずれの質問項目についても「0」，すなわち事前と事後で変化が見られなかった回答者が半数を超えた．一方で,「＋1」「－1」と若干の変化が見られた回答者がいずれの質問項目についてもあわせて 4 割前後見られた．

5.2.2. 「体系の認識についての調査」の分析

表 6 は「体系の認識についての調査」について各項目で「1 当てはまる」と強い肯定反応を示した回答者について事前，事後の結果を比較したものである．この表では「1 当てはまる」を積極肯定群に，それ以外を消極群とした二群に再分類した．最初の調査の結果と比較すると積極肯定群である回答者は「関連性の明示」では 8%減少し,「理解しやすさ」では 6%増加したが，有意な変化は見られなかった．

次に，事前，事後いずれも回答した 157 名を対象として，各項目で「1 当てはまる」「2 どちらかといえば，当てはまる」と肯定的な反応をした回答者について事前と事後でどの程度変化が生じたのかを分析した．「体系の認識についての調査」について,「1 当てはまる」「2 どちらかといえば，当てはまる」を肯定群に，「3 どちらかといえば，当てはまら

表 6 「体系の認識についての調査」リコード結果

	事前調査			事後調査		
	積極肯定群	消極群	合計	積極肯定群	消極群	合計
1(1)	58	111	169	58	102	160
理由・根拠の明示	34%	66%		36%	64%	
1(2)	66	103	169	51	109	160
関連性の明示	39%	61%		32%	68%	
1(3)	44	125	169	51	109	160
理解しやすさ	26%	74%		32%	68%	
2(1)	82	87	169	75	85	160
証明の練習	49%	51%		47%	53%	
2(2)	75	94	169	64	96	160
説明の練習	44%	56%		40%	60%	
2(3)	80	89	169	77	83	160
困難さ	47%	53%		48%	52%	

表 7 「体系の認識についての調査」事前・事後における肯定群・否定群のクロス集計

事後調査	肯定群		否定群		
事前調査	肯定群	否定群	肯定群	否定群	合計
1(1)	127	8	17	5	157
理由・根拠の明示	81%	5%	11%	3%	
1(2)	123	12	10	12	157
関連性の明示	78%	8%	6%	8%	
1(3)	111	22	12	12	157
理解しやすさ	71%	14%	8%	8%	
2(1)	133	9	11	4	157
証明の練習	85%	6%	7%	3%	
2(2)	131	11	9	6	157
説明の練習	83%	7%	6%	4%	
2(3)	124	13	10	10	157
困難さ	79%	8%	6%	6%	

ない」「4 当てはまらない」を否定群に再分類して分析する．表 7 は 6 つの質問項目について，事前及び事後でクロス集計した結果である．いずれの質問項目でも事前・事後とも

に肯定群である回答者が最も多く，7割を超えた．ともに否定群であった回答者は1割未満で，肯定群から否定群，否定群から肯定群に変化が見られた回答者は合わせて2割弱であった．

5.2.3. 活動の評価のための調査に強い肯定反応を示した回答者の分析

「体系の認識についての調査」の結果について，表6のように事前と事後の結果のあいだに変化が生じていることが分かった．この変化について,「活動の評価のための調査」の結果とのクロス集計をとることで検討したい．両方の調査に回答した150名を対象に，まずは活動について強い肯定反応を示した回答者について,「体系の認識についての調査」の結果に変化が生じているかどうかを分析したい．

事前事後の比較について，「＋2」「＋1」のものを肯定変化群，「0」「－1」「－2」「－3」のものを非肯定変化群とした二群に再分類する．また,「活動の評価のための調査」の「活動への興味」についての回答について「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」の2件を積極肯定群に，それ以外を消極群とした二群に再分類する．表8は事前事後の比較と「活動の評価のための調査」について質問項目のうち,「1(3) 理解しやすさ」についてクロス集計をとったものである．

表8の結果について直接確率計算を行った結果 $p=0.0171$（片側検定）となり，有意水準5%で有意となった．このことから,「活動への興味」について「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」と強く肯定的に捉えた回答者ほど,「1(3) 理解しやすさ」の回答において事前から事後で肯定的な変化が起こっていると考えることができる．

5.2.4. 活動の評価のための調査に肯定反応を示した回答者の分析

次に，活動について肯定的に捉えた回答者について,「体系の認識についての調査」の結果の変化に影響を与えているかどうかを検討したい．

事前事後の比較について，「－1」「－2」のものを否定変化群，「＋2」「＋1」「0」のものを非否定変化群とした二群に再分類する．また,「活動の評価のための調査」の「活動の意義」についての回答について「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」「3 そう思う」の

表 8 「1(3) 理解しやすさ」についてのクロス集計

	積極肯定群	消極群	合計
肯定変化群	17	30	47
非肯定変化群	19	84	103
合計	36	114	150

表 9 「2(1) 証明の練習」についてのクロス集計

	肯定群	否定群	合計
非否定変化群	97	9	106
否定変化群	30	9	39
合計	127	18	145

表 10 「2(3) 困難さ」についてのクロス集計

	肯定群	否定群	合計
非否定変化群	101	11	112
否定変化群	26	7	33
合計	127	18	145

3 件を肯定群に，それ以外を否定群とした二群に再分類する．その上で事前事後の変化と「活動の評価のための調査」の回答についてどのような影響が出ているかを検証する．

表 9 は質問項目「2(1) 証明の練習」について，双方の調査にともに回答した 145 名を対象にクロス集計をとったものである．表の結果について直接確率計算を行った結果 p=0.0224（片側検定）となり，有意水準 5%で有意となった．このことから,「活動の意義」について「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」「3 そう思う」と肯定的に答えた回答者ほど,「2(1) 証明の練習」の回答において事前から事後で否定的な変化が起こっていないと考えることができる．

表 10 は質問項目「2(3) 困難さ」について，双方の調査にともに回答した 145 名を対象にクロス集計をとったものである. 表の結果について直接確率計算を行った結果 p=0.0789（片側検定）となり，有意水準 5%で有意ではないが有意傾向が見られた．このことから,「活動の意義」について「5 すごくそう思う」「4 かなりそう思う」「3 そう思う」と答えた回答者ほど,「2(3) 困難さ」の回答において事前から事後で否定的な変化が起こっていない傾向がみてとれた．

5.3. 考察

本研究においては体系をつくることの動機や体系のよさに対する理解につながる活動を設計し，それが体系を考えることにつながっていることを検証することを目的としていた．事前，事後の質問紙調査で目覚ましい変化を捉えることはできなかったが，質問項目のうち「1 (3)理解しやすさ」「2(1) 証明の練習」については活動に対して肯定的な興味，あるいは意義を感じた学習者について体系のよさについての理解を向上，あるいは維持することができることが結論として得られた．また,「2(3) 困難さ」についても同様の傾向

が見られた．

一方で，「体系的に考えたことを検証する活動」については興味，意義ともに 8 割前後の学習者から肯定的な反応を得られたものの，強い肯定についてはいずれも 4 分の 1 程度に留まった．活動について学習者により魅力的で，意義があるように伝わるようにするための手立てについては引き続き検討したい．

6.　研究の成果と今後の課題

本研究では研究の目的を以下のように規定していた．

- ■　教材の作成（第 3 章）
- ■　授業および単元指導案の設計（第 4 章）
- ■　活動およびワークシートの評価（第 5 章）

それぞれの項目について，成果と課題についてみていきたい．

6.1.　研究の成果

6.1.1. 教材の作成についての成果

第 3 章で述べた通り，筆者が今まで作成したプリント，および秋山（2012）などを参考にして教材『武蔵中学校の幾何　立体幾何編』を作成した．また，教材の原稿をもとにして授業使用スライドを作成した．

6.1.2. 授業および単元指導案の設計についての成果

第 4 章で述べた通り，授業使用教材を使用することを前提とした単元授業案を設計した．また，公理的方法を学習指導の目的とする活動として杉山（1986）をもとに「体系的に考えることを意識させるための発問」「体系的に考えたことを検証する活動」の 2 つを設計し，授業スライドやワークシートに組み込んで実施した．

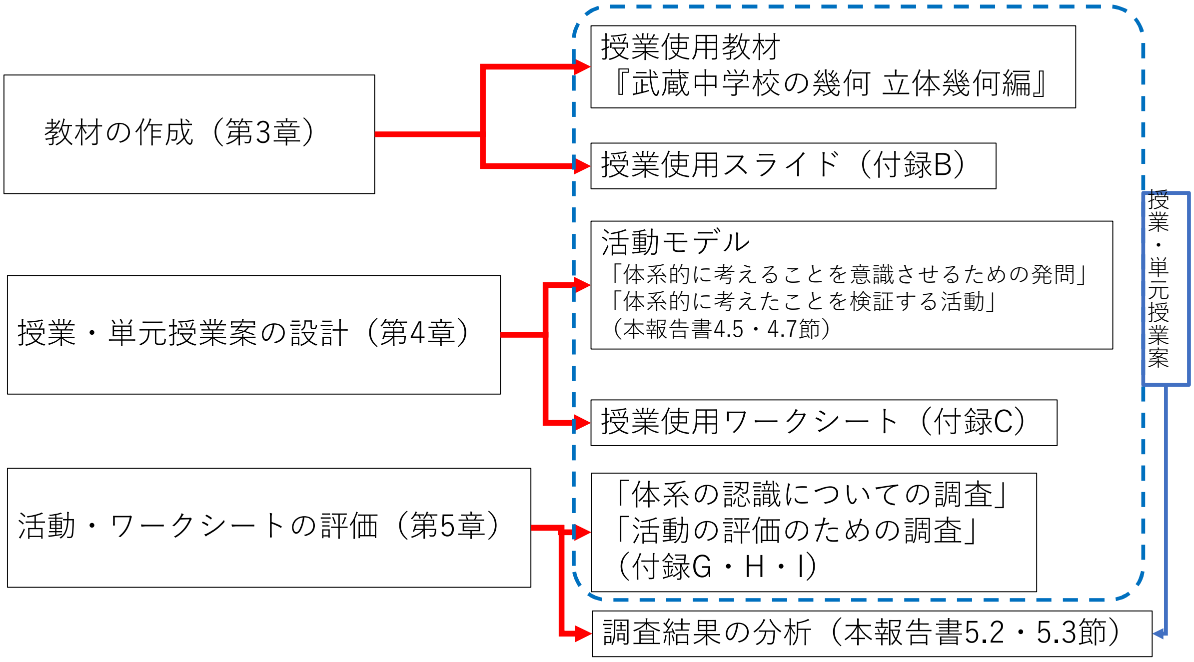


図 11 研究成果の概略

6.1.3. 活動およびワークシートの評価についての成果

第 5 章で述べた通り，設計した活動によって体系をつくることの動機や体系のよさが養われることを測定するために「体系の認識についての調査」「活動の評価のための調査」の 2 種の調査を設計し，これらを用いて活動について評価した．

その結果「体系的に考えたことを検証する活動」において肯定反応を示した学習者について,「体系の認識についての調査」のいくつかの項目において単元の前後で肯定的な変容が見られたことが確認された．

6.2. 今後の課題

最後に今後の課題について述べる．第 5 章の結果より，第 3 章，第 4 章において述べた教材，スライド，ワークシートを用いた一連の学習活動について学習が成立し，論理的な思考，すなわち公理的方法による思考をある程度の範囲で促進することができることが定量的に確認された．一方で，今回の研究では立体幾何の一部の単元のみにおいて活動を設計し，評価するにとどまった．

「体系的に考えることを意識させるための発問」「体系的に考えたことを検証する活動」のモデルは立体幾何に関わらず学習者に体系的に考えることを促す活動になり得るものであると思われる．今後も立体幾何に関わらず，様々な分野や学習者に対して活動の実施と検証が行われることが期待される．

一方で，今回の研究では活動の評価を単元の前後の「体系の認識についての調査」と活動中に一度行った「活動の評価のための調査」の 2 つのみに依存しており，学習者の認識の変容の過程について十分精密に評価することはできなかった．

学習者の認識の変容の測定方法については今後の課題としたい．定量的な方法について引き続き検討するとともに，今後は定性的にも評価することも検討が必要であると思われる．論理的思考について何らかの到達度の段階を持つ妥当なモデルを検討し，それに基づいて学習者の発話内容や記述を評価することも考えたい．

研究の過程において学習者の発問に対する反応の記録やワークシートの記述の記録を得ることができたことは僥倖である．これらをもとにして，論理的思考について今後は定量的評価，定性的評価の両面から研究が進められることが望まれる．

7. 謝辞

本報告書は筆者が岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育専攻において大学院生として研究した内容をもとに作成いたしました．指導教官である益子典文先生にはこの場を借りて感謝申し上げます．

引用・参考文献

赤間祐也（2020）中高数学科における Beamer を用いた教材作成と遠隔授業実践の報告．日本デジタル教科書学会発表予稿集，**9**：41-42

赤間祐也（2021）中高一貫教育校における幾何教育カリキュラムの現状調査研究．日本私学教育研究所紀要，**57**：37-40

赤間祐也（2022）武蔵中学校の幾何 立体幾何編．武蔵高等学校中学校，東京

秋山武太郎，春日屋伸昌 編（2012）わかる立体幾何学 第 6 版（わかる数学全書 IV）．日新出版，東京

D. ヒルベルト，中村幸四郎 訳（2005）幾何学基礎論（ちくま学芸文庫）．筑摩書房，東京

濱中裕明（2016）高校で可能な証明活動を組み入れた数学的活動についての考察－証明の多面的機能のケーススタディー．全国数学教育学会誌 数学教育学研究，**22**（1）： 171-178

波津久和崇，中川裕之（2017）命題を特殊化し別証明を考え一般化する方法に関する一考察．日本数学教育学会誌，**99**（11）：2-9

井口浩，岩崎浩（2014）「三角形の内角定理」の証明の必要性を触発する授業デザインの開発研究－証明の機能，特に「体系化」を視点として－．全国数学教育学会誌 数学教育学研究，**20**（2）：123-140

国宗進，風間喜美江，小沢慶晃（1985）空間図形の指導について．日本数学教育学会誌，**67**（1）：24-32

文部科学省編（2018）中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編．日本文教出版，大阪

文部科学省編（2019）高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編．学校図書，東京

武蔵中学校数学科編（編集時期不明）中学の幾何．武蔵中学校，東京

難波誠（2010）ヒルベルトの第 3 問題．数学セミナー2010 年 11 月号：22-25

奥村泰麿（1994）「論証のもつ一般性」の理解について．島根大学教育学部附属中学校研究紀要，**36**：53-60

プラトン，種山恭子・田之頭泰彦訳（1975）ティマイオス．プラトン全集 12，岩波書店，東京

瀬山士郎（1988）トポロジー：柔らかい幾何学．日本評論社，東京

志賀浩二（2009）数学の流れ 30 講（中）－17 世紀から 19 世紀まで－．朝倉書店，東京

杉山吉茂（1986）公理的方法に基づく算数・数学の学習指導．東洋館出版社，東京

高本誠二郎，岡崎正和（2008）図形の論理的位置づけの初期の様相について－論証への移

行を目指した中学 1 年『平面図形』のデザイン実験(1)－．全国数学教育学会誌 数学教育学研究，**14**：41-50
和田信哉（2020）日数教論文における空間図形の研究の動向と展望．第 8 回春季大会論文集：113-121
柳本成一，常廣一頼，竹澤浩二，柳本一休（2000）演繹的推論の「表現フレーム」を使った幾何の授業－「中点連結定理」の証明の"picture"化－．数学教育学会研究紀要，**41**（3・4）：47-58
ヨハネス・ケプラー，大槻真一郎・岸本良彦 訳（1982）宇宙の神秘．工作舎，東京